

メルカトル図法の数理

—大学初年次における STEM 教材として—

寺垣内 政一* 齋藤 敏夫†

概要

中学校の社会科地理的分野及び高等学校地理歴史科で学習する地図投影法の一つであるメルカトル図法は、等角性を最大の特徴とする。本稿では、大学初年次で学習する解析学の内容を活用する STEM 教材として、メルカトル図法の等角性を数学的に厳密かつ可能な限り初等的に解説する。さらに、地球上での測地線に相当する大圏航路（大円）をメルカトル図法で平面上に射影したとき、どのような平面曲線を与えるのか、その媒介変数表示を与えコンピューターによる描画を示す。最後に、メルカトル図法の歴史的動因であった等角航路の長さの導出を示す。

キーワード：メルカトル図法，大圏航路，等角航路，STEM 教材

1 はじめに

メルカトル図法は、中学・高校の地理的分野で取り上げられる代表的な地図投影法である。地球を球体とみなし、その周りに赤道で接するように円筒を巻きつける。地球の中心から円筒に向かって地表面を射影し、円筒を母線で切り開いて平面地図を得るのだが、このままでは等角性を得られない。そこで、緯線の間隔（南北方向）のある割合で縮小することで、等角性をもつメルカトル図が得られる。



図1 メルカトル図及びロンドン-広島間の大圏航路 (Mathematica による描画)

メルカトル図においては、経線・緯線はそれぞれ平行な直線で表示され、両者は直交する。メルカトル図の最大の特徴は、あらゆる地点において角度が保存される等角性にあり、1569年にフランドル地方出身の地理学者ゲラルドゥス・メルカトル (Gerardus Mercator: 1512-1594) が発表したものである。いわゆる円筒図法に分類される地図投影法の1つであるが、単に円筒に射影しただけではないことに注意が必要である。メルカトル図上の2点を結ぶ直線と経線は常に同じ角度で交わるため、一定の舵角を保てば、その等角航路をたどることができる。このため、羅針盤を用いる航海には便利であり、海図として利用されてきた。なお、インターネット上で利用できる地図の代表格である Google マップは、メルカトル図法を採用していることが知られている。

一方、メルカトル図の欠点として、経線あるいは赤道に沿った場合を除けば、等角航路は最短経路ではない。地球を近似的に球面とみれば、2地点間の最短経路は大円の一部である。それは大圏航路とよばれるが、メルカトル図上に正確に描くためには、平面曲線としての媒介変数表示が必要になる。本稿では、球面座標を用いて大円を媒介変数表示し、それをメルカトル図に射影することで、媒介変数表示された平面曲線として大圏航路を描画する。なお、数式処理システム Mathematica には、図1のように指定した2地点間を結ぶ大圏航路を描画する機能が組み込まれているが、本稿の目的は単にエンドユーザーとして結果だけを求めるのではなく、その仕組みを理解することにある。

必要となる知識は、逆三角関数、2変数関数の偏微分が主であり、いずれも大学初年次の解析学の学習内容である。しかし、通常は逆三角関数を学習しても、それによって不定積分が求まる関数が増えるといった程度の効

* 広島大学大学院教育学研究科。本研究は JSPS 科研費 JP17H00820 の助成を受けたものである。

† 上越教育大学大学院学校教育研究科

用しか提示されない。本稿で取り上げるメルカトル図法の初等的な分析は、大学初年次の学生に対して、現実世界との関連の中で知識を活用して課題の解決や仕組みの理解を行う STEM 教育の方向性に合致する教材であると確信する。

2 逆三角関数, 双曲線関数, 逆双曲線関数, グーデルマン関数, 逆グーデルマン関数

本稿での議論に必要となるいくつかの関数の族について、整理しておく。

2.1 逆三角関数

逆三角関数については、大学初年次の微積分学の学習内容であるため詳細は述べないが、主値に注意が必要である。

| 名称 | 表記 | 定義域 | 主値 |
|------------|-----------|---------------------|-------------------|
| arcsine | \arcsin | $[-1, 1]$ | $[-\pi/2, \pi/2]$ |
| arccosine | \arccos | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |
| arctangent | \arctan | $(-\infty, \infty)$ | $(-\pi/2, \pi/2)$ |

表 1 逆三角関数

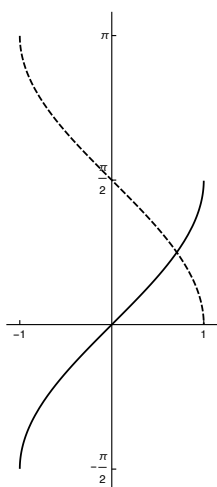


図 2 arcsine (実線) と arccosine (破線) のグラフ

2.2 双曲線関数

双曲線関数は次のように定義される。いずれも全ての実数を定義域とする。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

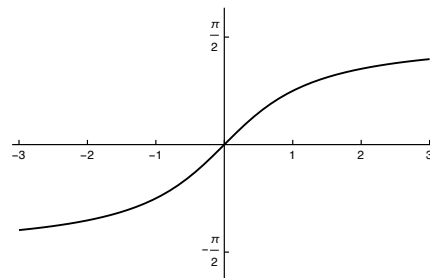


図 3 arctangent のグラフ

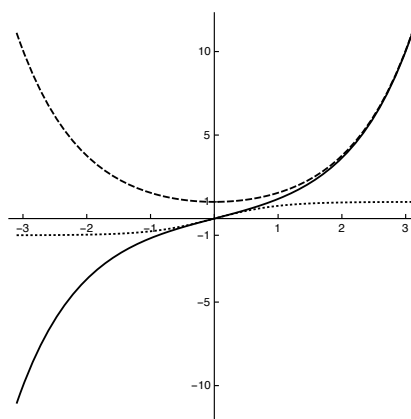


図 4 hyperbolic sine (実線), hyperbolic cosine (破線), hyperbolic tangent (点線) のグラフ

2.3 逆双曲線関数

メルカトル図法において本質的な役割を果たすのが、逆双曲線関数の 1 つである area hyperbolic sine¹ であり、hyperbolic sine の逆関数として次のように定義される。

$$\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

同様に、area hyperbolic cosine や area hyperbolic tangent も定義されるが、本稿では使用しない。

2.4 グーデルマン関数, 逆グーデルマン関数

グーデルマン関数 $\operatorname{gd}(x)$ は、全ての実数に対して、

$$\operatorname{gd}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} = \arctan(\sinh x)$$

として定義される。

また、逆グーデルマン関数 $\operatorname{gd}^{-1}(x)$ は、开区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ を定義域とし、

$$\operatorname{gd}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t} = \operatorname{arsinh}(\tan x)$$

と定義される。

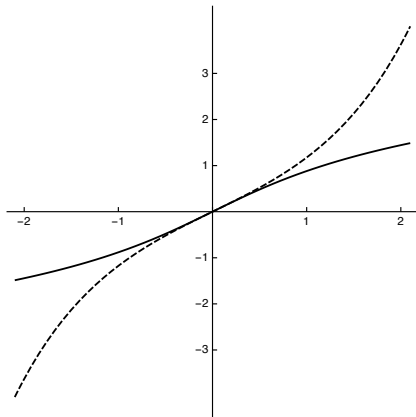


図5 area hyperbolic sine (実線) と hyperbolic sine (破線) のグラフ

第7節で, グーデルマン関数の導関数が

$$\text{gd}'(x) = \frac{1}{\cosh x} = \cos(\text{gd}(x))$$

で与えられることを用いる.

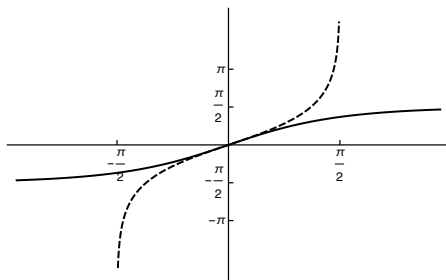


図6 グーデルマン関数 (実線) と逆グーデルマン関数 (破線) のグラフ

3 メルカトル射影

地球は, 座標空間における単位球面 S としてモデル化される. S は経度 u と緯度 v を変数とした球面座標 (極座標) を用いて

$$S(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \quad (1)$$

と表示される (図7). ここで, $-\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$, $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ とする. 通常, 経度に相当する u の変域は, $0 \leq u \leq 2\pi$ や $-\pi \leq u \leq \pi$ にとるのだが, 我々は後に考察する大圏航路の媒介変数表示の都合上, 意図的にこの変域を選択する².

メルカトル図を与えるためのメルカトル射影は, 球面の北極と南極の2点を除いた領域を定義域とするので, これ以降, v の変域は $-\pi/2 < v < \pi/2$ とする. した

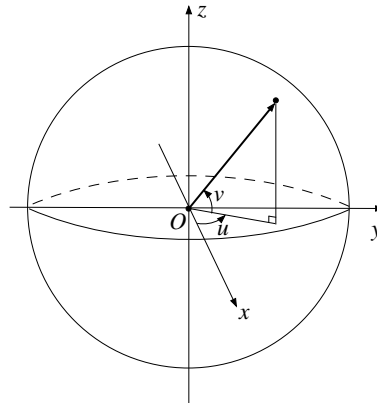


図7 球面座標

がって, uv 平面上の領域 $D = \{(u, v) \mid -\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2, -\pi/2 < v < \pi/2\}$ を定義域として, (1) で定義される写像 $S: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ が両極を除いた球面の媒介変数表示を与えている.

円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ には, 円柱座標 $(\cos u, \sin u, z)$ を与える. そこに向かって, 原点 O から S の点を射影し, さらに uv 平面上へ

$$S(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, \tan v) \mapsto (u, \tan v)$$

と写すことで, 両極を除く平面地図が得られ, これは心射円筒図法とよばれる.

経線は u が定数である場合に相当するため, uv 平面上では v 軸と平行な直線に, 同様に緯線は u 軸と平行な直線に対応する.

さて, 2つの経線 $S(u_0, v)$, $S(u_1, v)$ と2つの緯線 $S(u, v_0)$, $S(u, v_1)$ で囲まれた S 上の小さな長方形領域を考える. その像は uv 平面上で長方形領域となる. S 上で, 点 $S(u_0, v_0)$ と点 $S(u_1, v_0)$ をつなぐ緯線の長さは $(u_1 - u_0) \cos v_0$ であり, 対応する2点をつなぐ uv 平面上の線分の長さは $u_1 - u_0$ である. つまり, 緯度 v_0 における緯線上の弧は, その長さが $\sec v_0$ 倍に拡大される. 一方, 点 $S(u_0, v_0)$ と点 $S(u_0, v_1)$ をつなぐ経線の長さは $v_1 - v_0$ であり, 対応する2点をつなぐ uv 平面上の線分の長さは $\tan v_1 - \tan v_0$ である.

このとき, 2つの領域間で, 経線方向と緯線方向の比率が異なるため, 等角性が保証されていないという説明がなされることが多い. そして, この比率が一致するように, 例えば経線方向に縮小することで等角性が保証されるという説明が続く. この議論は誤っているわけではないが, そもそも球面上での角度はどのように定めているのか, 厳密に述べる必要もある.

メルカトル射影 F とは, $S(u, v)$ の行き先を $(u, \tan v)$

ではなく、 v 成分を縮小するために逆双曲線関数の 1 つ arsinh を用いて、

$$F : S(u, v) \mapsto (u, \operatorname{arsinh}(\tan v)) \quad (2)$$

とするものである³。その理由は次節で解説するが、 $\operatorname{arsinh}(\tan v)$ の導関数が $\sec v$ であることが鍵である。図 8 では、実線が $\tan v$ 、点線が $\operatorname{arsinh}(\tan v)$ のグラフを示している。

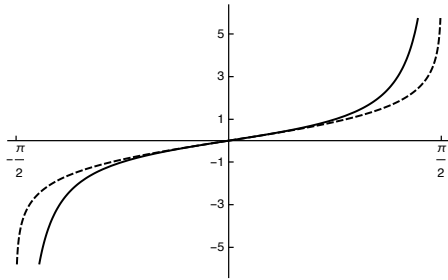


図 8 v 成分の比較 (実線 $\tan v$, 破線 $\operatorname{arsinh}(\tan v)$)

なお、 v 成分 $\operatorname{arsinh}(\tan v)$ は、逆グーデルマン関数を用いれば $\operatorname{gd}^{-1}(v)$ であり、

$$\log\left(\tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right), \log(\sec v + \tan v)$$

と表すことも可能である。

(2) で与えられるメルカトル射影は全単射であるので、その逆写像 F^{-1} を求めることもできる。

$$\begin{cases} x = u \\ y = \operatorname{arsinh}(\tan v) (= \operatorname{gd}^{-1}(v)) \end{cases}$$

を u と v について解けば、

$$\begin{cases} u = x \\ v = \arctan(\sinh y) (= \operatorname{gd}(y)) \end{cases}$$

となる。さらに (1) を用いて空間座標に表せば

$$F^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\frac{\cos x}{\cosh y}, \frac{\sin x}{\cosh y}, \tanh y\right)$$

を得る。

4 メルカトル射影の等角性

本節では、メルカトル射影を (2) として定義する理由及びその等角性を厳密に証明する。

球面上での角度を扱うには、各点において接平面を考慮することが、微分幾何学の観点からいえば自然である。球面 $S(u, v)$ 上の点 $P = S(u_0, v_0)$ において、接平面 Π_P を考える。点 P を通る緯線 (u 曲線) $S(u, v_0)$:

$(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \rightarrow S$ 及び経線 (v 曲線) $S(u_0, v) : (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \rightarrow S$ に対して、速度ベクトル $\mathbf{e}_u = S_u(u_0, v_0)$ 及び $\mathbf{e}_v = S_v(u_0, v_0)$ が接平面 Π_P の基底を与える。

実際、 $S(u, v)$ を u と v でそれぞれ偏微分して、

$$\begin{cases} S_u(u, v) = (-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0) \\ S_v(u, v) = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v) \end{cases}$$

を得る。したがって、

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u = (-\cos v_0 \sin u_0, \cos v_0 \cos u_0, 0) \\ \mathbf{e}_v = (-\sin v_0 \cos u_0, -\sin v_0 \sin u_0, \cos v_0) \end{cases}$$

である。このとき、これらの内積を計算すると

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_u = \cos^2 v_0 \\ \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = 0 \\ \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_v = 1 \end{cases} \quad (3)$$

である⁴。接平面 Π_P 上の任意のベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} は、基底 \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v を用いて、

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_u + a_2 \mathbf{e}_v \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_u + b_2 \mathbf{e}_v \end{cases}$$

と表せる。2つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} のなす角度を $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ とすると、(3) より

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 \cos^2 v_0 + a_2 b_2}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

である。なお、

$$\begin{cases} |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 \cos^2 v_0 + a_2^2 \\ |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 \cos^2 v_0 + b_2^2 \end{cases}$$

である。

さて、メルカトル射影の候補として

$$F : S(u, v) \mapsto (u, f(v))$$

を考える。ここで、 $f(v)$ は v を変数とする未知の関数である。赤道を u 軸に写すためには、 $f(0) = 0$ でなければならない。点 P は uv 平面上の点 $F(P)$ に写される。このとき、 P における接平面 Π_P から、 $F(P)$ における uv 平面への接平面 $\Sigma_{F(P)}$ への写像 F' が F から誘導される。ただし、 $\Sigma_{F(P)}$ は自然に uv 平面そのものと同一視される。

F' の働きをみるには、接平面 Π_P の基底である \mathbf{e}_u と \mathbf{e}_v の像を追えばよい。写像 F によって、 u 曲線 $S(u, v_0)$ は u 軸と平行な直線 $(u, f(v_0))$ に写る。したがって、点 $F(P)$ での速度ベクトルは $(1, 0)$ であり、 $F'(\mathbf{e}_u) = (1, 0)$ 。 v 曲線 $S(u_0, v)$ は v 軸と平行な直線 $(u_0, f(v))$ に写り、 $F'(\mathbf{e}_v) = (0, f'(v))$ を得る。

これら2つの内積を計算すると、

$$\begin{cases} F'(e_u) \cdot F'(e_u) = 1 \\ F'(e_u) \cdot F'(e_v) = 0 \\ F'(e_v) \cdot F'(e_v) = (f'(v_0))^2 \end{cases}$$

となる。

ここで(3)と比較すると、緯線方向を与える e_u は長さが $\sec v_0$ 倍になる一方で、経線方向を与える e_v は長さが $f'(v_0)$ 倍になっている。接平面 Π_P の基底に対して、拡大率を揃えるためには（それが等角性を保証するかどうかは別として）

$$f'(v_0) = \sec v_0$$

を満たせばよい。このことから、任意の点でこの条件を満たす関数 $f(v)$ として、 $\sec v$ の原始関数である $\operatorname{arsinh}(\tan v)$ が選ばれるのである⁵。なお、積分定数が0であることは、 $f(0) = 0$ から従う。

以降、 F は(2)で与えられるものとする。よって

$$\begin{cases} F'(e_u) \cdot F'(e_u) = 1 \\ F'(e_u) \cdot F'(e_v) = 0 \\ F'(e_v) \cdot F'(e_v) = \sec^2 v_0 \end{cases} \quad (4)$$

である。

F' は線形写像なので

$$\begin{cases} F'(\mathbf{a}) = a_1 F'(e_u) + a_2 F'(e_v) \\ F'(\mathbf{b}) = b_1 F'(e_u) + b_2 F'(e_v) \end{cases}$$

であり、

$$F'(\mathbf{a}) \cdot F'(\mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \sec^2 v_0.$$

また、

$$\begin{cases} |F'(\mathbf{a})|^2 = a_1^2 + a_2^2 \sec^2 v_0 = |\mathbf{a}|^2 \sec^2 v_0 \\ |F'(\mathbf{b})|^2 = b_1^2 + b_2^2 \sec^2 v_0 = |\mathbf{b}|^2 \sec^2 v_0 \end{cases}$$

である。以上から、 uv 平面において2つのベクトル $F'(\mathbf{a})$ と $F'(\mathbf{b})$ のなす角度を $\angle(F'(\mathbf{a}), F'(\mathbf{b}))$ とすれば

$$\begin{aligned} \cos \angle(F'(\mathbf{a}), F'(\mathbf{b})) &= \frac{F'(\mathbf{a}) \cdot F'(\mathbf{b})}{|F'(\mathbf{a})| |F'(\mathbf{b})|} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 \sec^2 v_0}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sec^2 v_0} \\ &= \frac{a_1 b_1 \cos^2 v_0 + a_2 b_2}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \end{aligned}$$

となり、 $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos \angle(F'(\mathbf{a}), F'(\mathbf{b}))$ 。したがって、 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(F'(\mathbf{a}), F'(\mathbf{b}))$ となり、メルカトル射影 F が等角性をもつことが確認された。

5 大圏航路の像

5.1 基準大円

球面上の2点 $P_1 = S(u_1, v_1)$, $P_2 = S(u_2, v_2)$ を通る大円 C について考察する。これら2点が互いに対蹠点の位置にあれば、 C には任意性があり、特に経線を選択でき、メルカトル図上では v 軸に平行な直線となる。また、2点とも赤道上にあれば、 C は赤道そのものであり、メルカトル図では u 軸になる。したがって、これら2つの場合は除外してよい。

赤道面を Π_e とし、原点 O と P_1 及び P_2 を通る平面を Π とする。大円 C は Π と球面 S との交わりである。2つの平面 Π_e と Π のなす角度（面角）を θ とすると、 $0 < \theta < \pi/2$ である。

さて、2点 $A = S(0, 0) = (1, 0, 0)$ と $S(\pi/2, \theta) = (0, \cos \theta, \sin \theta)$ を通る大円 C_0 を考え、基準大円とよぶ。対応する平面 Π_0 と赤道面のなす角度は θ であり、 C は基準大円 C_0 を z 軸の周りで回転移動することで得られる。

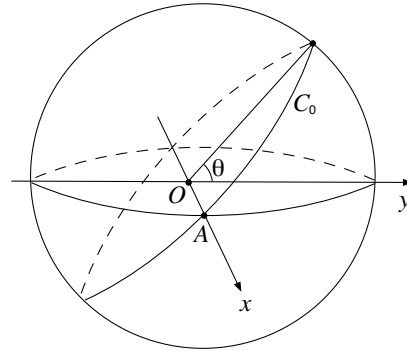


図9 基準大円 C_0

Π の単位法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2}|}$$

とする。ここで、 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は z 成分 n_3 が正であるように選んでおく。このとき、 $\cos \theta = n_3$ なので、 $\theta = \arccos n_3$ となる。次に Π_0 の単位法線ベクトル $\mathbf{n}_0 = (0, -\sin \theta, \cos \theta)$ を考える。これら2つの単位法線ベクトルの xy 平面への正射影 $\mathbf{n}' = (n_1, n_2)$, $\mathbf{n}'_0 = (0, -\sin \theta)$ のなす角度を φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とすれば、

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}'_0 \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{n}'_0| |\mathbf{n}'|} = -\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

だから

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right).$$

以上から、基準大円 C_0 を大円 C に写すには、 z 軸の周りに $\pm\varphi$ だけ回転すればよい。ここで、 $n_1 \geq 0$ ならば φ 、 $n_1 < 0$ ならば $-\varphi$ を選択しなければならない。(arccosine の主値が $[0, \pi]$ であることに注意する。)

5.2 基準大円の媒介変数表示

赤道は $(\cos t, \sin t, 0)$ ($-\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$) として媒介変数表示される。これを x 軸の周りに、 x 軸の正の方向からみて反時計回りに θ だけ回転すれば、基準大円 C_0 が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos \theta \sin t \\ \sin \theta \sin t \end{pmatrix}$$

より、基準大円 C_0 上の点は

$$(\cos t, \cos \theta \sin t, \sin \theta \sin t)$$

という媒介変数表示をもつ。対応する経度 α と緯度 β は、次のようにして求められる。

まず、第3成分をみて、 $\sin \beta = \sin \theta \sin t$ だから、 $\beta = \arcsin(\sin \theta \sin t)$ である。arcsine の主値は $[-\pi/2, \pi/2]$ であるが、 $0 < \sin \theta < 1$ なので、 $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ となっている。

経度については注意が必要である。 $-\pi/2 < t < \pi/2$ のときは、

$$\tan \alpha = \frac{\cos \theta \sin t}{\cos t} = \cos \theta \tan t$$

より、 $\alpha = \arctan(\cos \theta \tan t)$ でよい。 $t = \pm\pi/2$ のときは、明らかに $\alpha = \pm\pi/2$ である。最後に、 $\pi/2 < t < 3\pi/2$ のときは、arctangent の主値が $(-\pi/2, \pi/2)$ であることを考慮すれば、 $\alpha = \arctan(\cos \theta \tan t) + \pi$ としなければならない。

以上から

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{cases} \arctan(\cos \theta \tan t) & (-\pi/2 < t < \pi/2) \\ \arctan(\cos \theta \tan t) + \pi & (\pi/2 < t < 3\pi/2) \\ \pm\pi/2 & (t = \pm\pi/2) \end{cases} \\ \beta = \arcsin(\sin \theta \sin t) \end{array} \right. \quad (5)$$

を得た。

5.3 基準大円の像

(5) で与えられた基準大円 C_0 をメルカトル射影 F で uv 平面に写すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0(t) &= (\alpha, \operatorname{arsinh}(\tan \beta)) \\ &= \left(\alpha, \operatorname{arsinh} \left(\frac{\sin \theta \sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 t}} \right) \right). \end{aligned}$$

ただし、 α は (5) で与えられる。なお、

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

を用いた。図 10 では、 $\theta = \pi/3, \pi/4, \pi/6$ の場合の基準大円 C_0 をメルカトル図上に描画した曲線を示している。

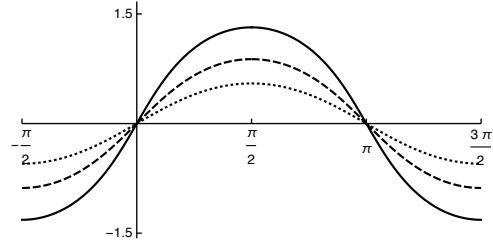


図 10 基準大円の像 (実線 $\theta = \pi/3$, 破線 $\theta = \pi/4$, 点線 $\theta = \pi/6$)

求める大円 C の像は、基準大円の像 $\mathbf{c}_0(t)$ を $\pm\varphi$ だけ u 軸方向に平行移動して得られる。

6 具体例の計算

2 地点を結ぶ大圏航路をメルカトル図上に描く計算例を示す。

ロンドンの座標は、西経 0 度 07 分、北緯 51 度 30 分である。弧度法に変換して、 $u = -7\pi/10800$ 、 $v = 103\pi/360$ 。同様に、広島は東経 132 度 27 分、北緯 34 度 23 分なので、 $u = 883\pi/1200$ 、 $v = 2063\pi/10800$ である。ここで、ロンドンを P_1 、広島を P_2 とすれば、

$$\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2} = (-0.477281, -0.787477, 0.37837)$$

となり、 z 成分が正になる。このベクトルの長さが 0.995531 だから、

$$\mathbf{n} = (-0.48, -0.79, 0.38)$$

とおく (\mathbf{n} の長さは 0.9994)。すると、

$$\theta = \arccos n_3 = 1.181$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) = 0.546$$

である。

さて、基準大円 C_0 はこの θ によって定められ、メルカトル射影によるその像を u 軸方向に $-\varphi$ だけ平行移動すれば、ロンドンと広島を通る大圏航路が求まる。ただし、ロンドン-広島間だけ大圏航路を描くためには、媒介変数 t の変域を算出する必要がある。

基準大円 C_0 上で、ロンドンと同じ緯度をもつ点は、

$$\sin \theta \sin t = \sin \frac{103\pi}{360}$$

から $t = 1.01$ 、広島に対応する点は $t = 2.48$ で与えられる。この範囲に t の変域を限定して、 uv 平面上に描画したものが図 11 である。さらに位置を合わせて実際のメルカトル図と重ねたものが図 12 である。

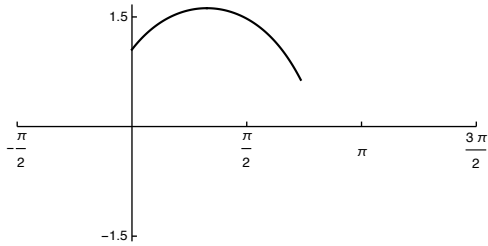


図 11 ロンドン-広島間の大圏航路

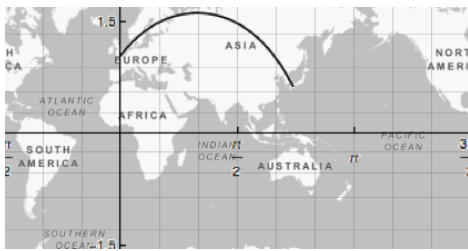


図 12 ロンドン-広島間の大圏航路（メルカトル図との合成）

7 等角航路の長さ

7.1 単位球面上での長さ

メルカトル図法の歴史的動因は等角航路にある。地球上の 2 地点間を結ぶ曲線のうち、すべての経線と等角で交わるものであり、メルカトル図上では線分になる。最後に、地球上の 2 地点を結ぶ最短の等角航路の長さの導出を示す。以下では、記述の煩雑さを避けるために、グーデルマン関数を g 、逆グーデルマン関数を G で表す。

単位球面 S 上の極点ではない 2 点 $P = S(u_1, v_1)$, $Q = S(u_2, v_2)$ を結ぶ最短の等角航路を考える。メルカトル射影 F によって、これらはメルカトル図上の 2 点 $F(P) = (u_1, G(v_1))$, $F(Q) = (u_2, G(v_2))$ に写る。

(i) $u_1 = u_2$ の場合。単位球面上で等角航路は大円に沿うものであり、長さは緯度の差 $|v_2 - v_1|$ になる。

(ii) $v_1 = v_2$ の場合。単位球面上で等角航路は緯線に沿うものであり、長さは $|u_2 - u_1| \cos v_1$ である。

(iii) それ以外の場合。単位球面を z 軸の周りに回転して、 P の経度を 0 としてよい。したがって、改めて $P = S(0, v_1)$, $Q = S(u_2 - u_1, v_2)$ とする。さらに対称性から $u_2 - u_1 > 0$ としてよい。メルカトル図上で 2 点 $F(P)$ と $F(Q)$ を結ぶ線分が最短の等角航路に相当する。 $\overrightarrow{F(P)F(Q)}$ が v 軸の正方向となす角度を θ ($0 < \theta < \pi$) とする。すると、この線分は媒介変数表示

$$((u_2 - u_1)t, (G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

をもつ。これをメルカトル射影の逆写像で球面上に戻せば、球面座標で表示された曲線

$$((u_2 - u_1)t, g((G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1))) \quad (6) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

を得る。ここで、(6) の u 成分、 v 成分をそれぞれ

$$\begin{cases} u(t) = (u_2 - u_1)t \\ v(t) = g((G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1)) \end{cases}$$

とおけば、求める等角航路の長さ L は、極座標であることに注意して、

$$L = \int_0^1 \sqrt{\cos^2 v(t) \cdot (\dot{u}(t))^2 + (\dot{v}(t))^2} dt$$

で求められる。 $g'(x) = \cos(g(x))$ に注意すると、

$$\dot{v}(t) = (G(v_2) - G(v_1)) \cdot \cos(g((G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1)))$$

なので、

$$L = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (G(v_2) - G(v_1))^2} \int_0^1 \cos(g((G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1))) dt.$$

そして、 G の単調増加性と

$$v_1 < v_2 \iff \sec \theta > 0$$

より

$$\begin{aligned} & \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (G(v_2) - G(v_1))^2} \\ &= (G(v_2) - G(v_1)) \sec \theta \end{aligned}$$

であること、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos(g((G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1))) dt \\ &= \left[\frac{g((G(v_2) - G(v_1))t + G(v_1))}{G(v_2) - G(v_1)} \right]_0^1 \\ &= \frac{v_2 - v_1}{G(v_2) - G(v_1)} \end{aligned}$$

より, $L = (v_2 - v_1) \sec \theta$ となる.

実際の地球上での等角航路の長さは, 地球の半径を R として $RL = R(v_2 - v_1) \sec \theta$ で与えられる. なお, 地球は完全な球体ではないので, 赤道半径 6378.1km に対して, 極半径は 6356.8km である. 次の計算例では, 平均半径 $R = 6371\text{km}$ を用いる.

7.2 具体例の計算

第6節で用いたロンドン-広島間を結ぶ等角航路 (図13) の長さを求める. (実際には陸地なので, 船で通ることはできないが.) メルカトル図上で, ロンドンから広島に向かうベクトルと v 軸正方向の単位ベクトル $(0, 1)$ とのなす角度 θ を計算すると, $\theta = 100.104^\circ$ となる. したがって,

$$R \left(\frac{2063\pi}{10800} - \frac{103\pi}{360} \right) \sec \theta = 10848.9 \text{ (km)}$$

を得る.

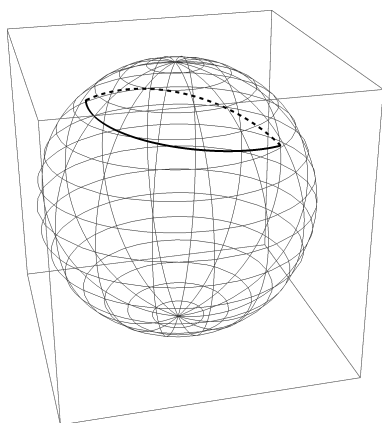


図13 ロンドン-広島間の等角航路 (実線) と大圏航路 (破線)

比較のために, 大圏航路の長さを計算する. 第6節の $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ のなす角度が 1.47622 となるので, R をかければ 9405km と算出される.

オンラインで等角航路や大圏航路の長さを計算するサイトは数多く存在する. 例えば [6] を使用すると, 等角航路 10876.58km, 大圏航路 9427.51km と算出される. WGS84 とよばれる世界測地系に基づいており, 地球を楕円体として扱っているため, 我々の計算より精度は高い. 本稿では扱わなかったが, メルカトル射影について, 楕円体としての扁平率を考慮したものが知られている ([3]).

参考文献

- [1] D. Daners, *The Mercator and stereographic projections, and many in between*, Amer. Math.

Monthly **119** (2012), no. 3, 199–210.

- [2] W. Pijls, *Some properties related to Mercator projection*, Amer. Math. Monthly **108** (2001), no. 6, 537–543.
- [3] J. P. Snyder, *Map projections – A working manual*, USGS Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987.
- [4] 田中好國, 地図投影法の数理的 understanding の方法について: とくに文系出身の地理教師のために, 兵庫地理, **32** (1987), 20–29.
- [5] 西川青季, 等長地図はなぜできない: 地図と石鹸膜の数学, 日本評論社, 2014.
- [6] PlanetCalc, A free online calculator collection, <https://planetcalc.com>.

注

¹inverse hyperbolic sine とよぶこともある. また, arcsinh という表記もみられるが誤用である.

²経度の変域をこのように選択すると, アメリカ・ミズーリ州セントルイス付近がメルカトル図の左端になる.

³ v 成分を $(5/4)\operatorname{arsinh}(\tan(4v/5))$ に修正したものは, ミラー図法とよばれる. 両極が有限の範囲に描けることが特徴だが, 等角性が失われてしまう.

⁴微分幾何学の言葉を用いれば, これらが第1基本量 E, F, G に相当する.

⁵この積分は, 高校の数学 III の教科書に見られる.