

結び目のレンズ空間手術，ザイフェルト手術 及びトロイダル手術^{*1}

寺垣内 政一 (広島大学大学院教育学研究科)

1 序

Lickorish [40]，Wallace [60] による古典的な結果として，向き付け可能かつ連結な閉 3 次元多様体は 3 次元球面内の絡み目のデーンス手術によって得られることが知られており，3 次元多様体論と結び目理論をつなぐ架け橋としてのデーンス手術の存在意義を示している．本稿では，もっとも基本的な状況である 3 次元球面内の結び目でのデーンス手術に限定して話を進める．

ここ数年，Ozsváth-Szabó による Heegaard Floer homology 理論がデーンス手術に画期的な進展をもたらした．時を同じくして，Kronheimer-Mrowka [37] によって Property P 予想が解決された．残念ながらこのどちらも筆者の手に負えるものではないが，可能な限りこういった最新の進展を含めて解説したい．

3 次元球面 S^3 内の結び目 K に対して，その閉管状近傍を $N(K)$ ($\cong S^1 \times D^2$) とするとき， $E(K) = S^3 - \text{Int } N(K)$ を K の外部とよぶ． $E(K)$ は境界がトーラス一つからなるコンパクトな 3 次元多様体である．ソリッド・トーラス V を用意し，トーラス間の同相写像 $f: \partial V \rightarrow \partial E(K)$ を用いて， $E(K)$ と V を張り合わせる操作をデーンス手術とよぶ．生じる閉 3 次元多様体は，実際には V のメリディアン μ の行き先である単純閉曲線のアイソトピー類 r にのみ依存するため， $K(r)$ と記述されることが多い．

逆に，トーラス $\partial E(K)$ 上で可縮でない単純閉曲線（あるいはそのアイソトピー類） r を一つ指定すれば，デーンス手術を指定できる．この r をその手術のスロープとよぶ．特に，ロンジュチュード λ とメリディアン μ を $H_1(\partial E(K); \mathbb{Z})$ の基底に選び， r のホモロジー類 $[r]$ を $[r] = m\mu + n\lambda$ とすれば， r に $m/n \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ が対応する．このとき， $K(r)$ を $K(m/n)$ と書く． $1/0$ に対応する手術は元の 3 次元球面を復元するに過ぎないため，自明な手術をよばれ考察対象にはならない．

^{*1} 本原稿は，2006 年度日本数学会秋季総合分科会特別講演の抽象を加筆修正したものである．

例 1.1 O を自明な結び目とする．このとき， $O(1/n) = S^3$ ， $O(0/1) = S^2 \times S^1$ ．
そして， $m \neq 0, 1$ ならば $O(m/n) = L(m, n)$ (タイプ (m, n) のレンズ空間)．

2 結び目からはどんな 3 次元多様体を得られるか

デー手術の対象を 3 次元球面内の結び目に限定した場合，どんな 3 次元多様体
が得られるのか，あるいは得られないのか．手術のパラメーターであるスロープ r
が m/n に対応するとき， $H_1(K(r)) = \mathbb{Z}_{|m|}$ であるから，1 次元ホモロジー群が巡
回群でない多様体は得られない．また，基本群に目をやれば，結び目の補空間の基
本群は weight 1 であり， $K(r)$ の基本群はその商群であることから，weight は高々
1 でなければならない．この節では，最近の結果を中心に重要な結果のみ述べる．

冒頭で述べたように，次の定理は Property P 予想とよばれていたものであり，
2004 年，Kronheimer-Mrowka によって解決された．

定理 2.1 (Kronheimer-Mrowka [37]) 非自明な結び目 K に対して， $m/n \in \mathbb{Q}$
ならば， $\pi_1 K(m/n) \neq \{1\}$ ．

3 次元多様体の複雑さをはかる一つの尺度として，Heegaard 種数とよばれるも
のがある．その 3 次元多様体が許容する Heegaard 分解の最小の種数であり，3 次
元球面のみが種数 0 をもち，レンズ空間と $S^2 \times S^1$ のみが種数 1 をもつ．(近年の
慣習に習って， S^3 と $S^2 \times S^1$ はレンズ空間とよばないことにする．) 種数 2 になる
と，膨大な量の多様体が存在する．たとえば，荒っぽい表現になるが，代表的な結
び目の族である 2 橋結び目やトーラス結び目の非自明なデー手術で得られる多様
体は，そのほとんどが種数 2 をもつ．

次の定理は，その帰結として，結び目がその補空間の位相型で定まるという補空
間予想を導いた．

定理 2.2 (Gordon-Luecke [23]) 非自明な結び目 K に対して， $m/n \in \mathbb{Q}$ なら
ば， $K(m/n) \neq S^3$ ．

なお，Poincaré 予想 (cf. [44]) を認めれば，定理 2.1 は定理 2.2 の帰結となる．
次の定理は，Property R とよばれていたものの肯定的解決である．

定理 2.3 (Gabai [18]) 結び目 K に対して， $K(m/n) = S^2 \times S^1$ ならば， K は
自明であり， $m/n = 0/1$ である．

そして, Seiberg-Witten 理論と monopole Floer homology を用いた Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó [38] は衝撃的であった.

定理 2.4 (Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó [38]) O を自明な結び目とする. 結び目 K に対して, あるスロープ r で $K(r) = O(r)$ (向きをこめて) であるならば, $K = O$ である.

これは定理 2.2 の別証明を与えているだけでなく, P^3 予想とよばれたものの解決をも含んでいた.

系 2.1 ([38]) 非自明な結び目のデーン手術によって, 実射影空間 P^3 は得られない.

同論文では, 次の結果も示されている.

定理 2.5 ([38]) 非自明な結び目のデーン手術によって, 基本群の位数が 5 未満のレンズ空間は得られない.

右手型 trefoil の 5-surgery によって, $-L(5, 1)$ が生じることは知られているため, 上記の結果は最良といってよい.

さらに, Heegaard Floer homology 理論の応用として, 最近, 次が得られている.

定理 2.6 (Property I 予想: Ghiggini [19]) $K(r)$ が Poincaré homology 球面になるのは, K が trefoil のときに限る. (より正確には, 右手型 trefoil の 1-surgery が, 左手型 trefoil の (-1) -surgery のいずれかのみ.)

これをさらに拡張して, 種数 1 のファイバー結び目をデーン手術によって特徴付けられることが示された. (同様のことは, 種数 2 以上では成り立たない.)

定理 2.7 (Ozsváth-Szabó [49]) K_0 を trefoil または figure-eight knot とする. 結び目 K に対して, あるスロープ r で $K(r) = K_0(r)$ (向きもこめて) であれば, $K = K_0$ である.

3 結び目の分類から

Thurston の著名な結果の帰結として, 結び目はトーラス結び目, サテライト結び目, 双曲結び目の 3 つの族に分類される. ここで, 合成型結び目はサテライト結

び目に含まれることに注意する .

トーラス結び目は , その外部がザイフェルト多様体になる結び目として特徴付けられており , そのデー手術は完全に把握されている ([45]) .

命題 3.1 $T_{p,q}$ をタイプ (p, q) のトーラス結び目とする . ただし , $0 < q < p$ とする . このとき ,

$$T_{p,q} \left(\frac{m}{n} \right) = \begin{cases} L(p, q) \# L(q, p), & \text{if } \frac{m}{n} = pq \\ L(m, nq^2), & \text{if } \frac{m}{n} = pq \pm \frac{1}{n} \\ S^2(p, q, |npq - m|), & \text{otherwise} \end{cases}$$

次に , サテライト結び目に対して , そのデー手術の全貌が解明されているわけではないが , 様々な結果が得られている .

K をサテライト結び目とする .

- $K(m/n)$ が既約になるのは , K がケーブル結び目であり , かつ m/n がケーブルリング・アニュラスのスロープに一致するときに限る . ([52])
- $\pi_1 K(m/n)$ が有限巡回群になるのは , K がトーラス結び目 $T_{p,q}$ の $(2, 2pq \pm 1)$ ケーブル結び目であり , $m/n = 4pq \pm 1$ のときに限る . ([7, 61])
- K がちょうど 1 回だけのケーブルでないならば , $K(m/n)$ がザイフェルト多様体になるのは $m/n \in \mathbb{Z}$ のときに限る . しかもそのような手術は高々 2 つしかない . ([43])

結び目のデー手術によってザイフェルト多様体が生じる場合 , その底空間は球面か射影平面でなければならない . 宮崎-茂手木 [43] は , 射影平面上のザイフェルト多様体を生成するサテライト結び目を決定している .

さて , デー手術研究の中心をなすのは , 双曲結び目の手術といってよいであろう . 基本となるのは次の定理である .

定理 3.1 (Thurston の双曲デー手術定理) K を双曲結び目とする . 高々有限個の手術を除いて , $K(r)$ は双曲 3 次元多様体になる .

そこで , $K(r)$ が非双曲的となる手術を , 例外的デー手術とよぶ . 例外的手術はどのくらいあるのか . 最も簡単な双曲結び目である figure-eight knot に対して , 例外的手術は $\frac{1}{0}, 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ の 10 個 , $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot に対しては $\frac{1}{0}, 16, 17, 18, \frac{37}{2}, 19, 20$ の 7 個であることが知られている . また , 例外的手術を 6 個もつ双曲結び目は無限に多く知られている (たとえば , twist knot) .

予想 3.1 双曲結び目の例外的デーモン手術は, figure-eight knot と $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot を除けば, 高々 6 個である.

現時点での最良上界は, Hodgson-Kerckhoff [29] による 60 であるが, 幾何化予想 (cf. Cao-Zhu [11]) を認めれば, Agol [1] 及び Lackenby [39] による 12 が知られており, 更に整数手術に限定すれば, 市原 [30] によって最良上界 9 が得られている.

Thurston の幾何化予想の帰結として, $K(r)$ が非双曲的である場合, $K(r)$ は次の 4 つのうちのいずれかであることが知られている.

- (R) 可約な多様体 (すなわち, 本質的球面を含む)
- (L) レンズ空間
- (S) 球面上 3 本の特異ファイバーをもつザイフェルト多様体
- (T) トロイダル多様体 (すなわち, 本質的トーラスを含む)

実際, 選択肢 (R) は起こらないということが, 現時点ではケーブル予想と同値である. また, 射影平面上のザイフェルト多様体が高々 1 本の特異ファイバーをもてば (S) に帰着し, 2 本以上の特異ファイバーをもてば (T) に帰着する. 従って, 以下では残る 3 つの選択肢 (L), (S), (T) について考察していきたい.

4 双曲結び目の例外的デーモン手術

4.1 レンズ空間手術

定理 4.1 (巡回手術定理: Culler-Gordon-Luecke-Shalen [12]) K はトーラス結び目でなく, $m/n \neq 1/0$ とする. もし $\pi_1 K(m/n)$ が巡回群であるならば, $m/n \in \mathbb{Z}$ であり, そういうスロープは高々 2 つしかない. さらに, もし 2 つあるならば連続している.

有限巡回群を基本群にもつ向き付け可能な閉 3 次元多様体はレンズ空間に限ると予想されていたが, 最近, Morgan-Tian [44] によって解決された. 従って, 巡回手術とレンズ空間手術は同じものといってよい.

Berge [5] は doubly primitive knot とよばれる結び目のクラスを定義した. それは, S^3 の種数 2 の Heegaard 曲面上にのる結び目であって, 両側のハンドル体に対して基本群レベルで生成系の片割れになっているものである. この定義から, doubly primitive knot は自然にレンズ空間手術を許容する. 実際, Berge は

doubly primitive knot のクラスを 12 個構成している。(最近, Baker [2, 3] によって, Berge knot の surgery description による表現が与えられている。ただし, どちらのプレプリントの図にもミスが散見されるので注意が必要。) 第一のクラスはトールラス結び目全体からなり, 第二のクラスは先にのべたレンズ空間手術を許容するサテライト結び目全体からなる。これら 12 のクラスに属する doubly primitive knot をあえて Berge knot とよぶことにする。(文献によっては, doubly primitive knot のことを Berge knot とよんでいるので注意を要する。)

予想 4.1 (Berge) doubly primitive knot は Berge knot である。すなわち, doubly primitive knot は, Berge が構成した 12 のクラスのいずれかに属する。

doubly primitive knot のレンズ空間手術が必ずある doubly primitive position での surface slope として実現されるかという問題は, 未解決に思われる。そして, 次の予想こそがレンズ空間手術に関する基本予想といってよいだろう。(Kirby の問題集 [36] にも, 問題 1.78 として収録されている。)

予想 4.2 (Berge) レンズ空間手術をもつ結び目は, doubly primitive knot である。

以上をまとめれば, Berge knot は doubly primitive knot であり, doubly primitive knot はレンズ空間手術を許容する。これら 3 つの結び目のクラスはすべて一致することが期待されていることになる。

最近, Kronheimer-Mrowka や Ozsváth-Szabó による monopole Floer homology 理論 [38], Heegaard Floer homology 理論 [48] がレンズ空間手術に関する衝撃的な結果を導いている。

- 結び目 K がレンズ空間手術を許容するならば, $g(K) = \frac{1}{2} \deg \Delta_K$.
- (p, q) に対して, $K(p) = L(p, q)$ となるレンズ空間手術をもつ結び目 K の Alexander 多項式となりうる Laurent 多項式は有限個しかなく, それを求めるアルゴリズムが示されている。
- $|m| < 9$ なる整数 m に対して, $K(m)$ がレンズ空間になるならば, K は自明か trefoil .
- 結び目 K がレンズ空間手術をもつならば,

$$\Delta_K(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} (t^{n_j} + t^{-n_j})$$

(ただし, $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m$)

なお, 最後の Alexander 多項式に関する条件は, 必要条件ではあるが十分条件でないことがわかっている. たとえば, 10_{132} は Alexander 多項式 $\Delta = 1 - (t + t^{-1}) + (t^2 + t^{-2})$ をもち, 上記の条件をクリアするが, レンズ空間手術をもたないことがわかっている.

斎藤, 市原両氏との共同研究 [31] において, doubly primitive knot に対する Alexander 多項式の公式を与えた. また, その議論における副産物として, 上述の Ozsváth-Szabó による Alexander 多項式への制約をエレメンタリーな議論のみで再現することができている.

また, 門上 [33] や門上-山田 [34, 35], 丹下らによってもそういった制約が研究されている.

さて, Berge knot に対する考察に基づいて, 筆者は以前に次の予想を提出した.

予想 4.3 (Goda-Teragaito [20]) 双曲結び目 K がレンズ空間手術 $m \in \mathbb{Z}$ をもつとき, K はファイバー結び目であり, かつ $2g(K) + 8 \leq |m| \leq 4g(K) - 1$.

Rasmussen [51], Baker [4] による結果は, これにかなり迫っている.

- $K(m)$ がレンズ空間ならば, $2g(K) - 1 \leq |m|$. ([38])
- $K(m)$ がレンズ空間ならば, $|m| \leq 4g(K) + 3$. (Rasmussen [51])
- K を non-doubly primitive knot とする. 整数 m がレンズ空間手術ならば, $|m| \leq 4g(K) - 2$. (Baker [4])

レンズ空間手術をもつ結び目のファイバー性については, Berge knot 全てに対する確認に基づいて, 上記の予想を提出したわけだが, 同じく Berge knot に対する確認は [28] に収録されている. その後, Stallings の古典的な結果に帰着させる議論によって (結び目群の交換子部分群が有限生成であること), doubly primitive knot のファイバー性が, Ozsváth-Szabó [48] によって示されていた. そして, 最終的な結論が Ni [47] によってもたらされた.

- レンズ空間手術をもつ結び目はファイバー結び目である. (Ni [47])

これは, knot Floer homology 理論と sutured manifold 理論を用いるものである. 驚くべきことに, レンズ空間手術に限らず, いわゆる L 空間手術でも正しいことが示されており, 従って, 基本群が有限群になるような多様体を生じる有限手術をもつ結び目のファイバー性まで得られたことになる.

巡回手術定理によって、双曲結び目のレンズ空間手術は高々 2 つであるが、実際に 2 つもつ例は、筆者の知る限り、1 つの無限系列と孤立した 1 例のみである。しかも、いずれも Eudave-Munöz knot であって、2 つのレンズ空間手術（整数スロープ）のちょうど平均値として半整数トロイダル手術をもっている。

問題 4.1 2 つのレンズ空間手術をもつ双曲結び目は、Eudave-Munöz knot か。

この問題に対しては、幾何的なアプローチか、Culler-Shalen 理論によるアプローチが可能かもしれない。

また、Berge knot の大半のクラスについて、divide knot であることが山田 [63] によって確認されている。さらに、それらのレンズ空間手術が、divide knot としての表示から自然に定まる多角形領域の面積と関連することが指摘されており、興味深い。

4.2 ザイフェルト手術

先に述べたように、ザイフェルト手術でえられるザイフェルト多様体の底空間は、ホモロジーの制限によって球面か射影平面である。

まず、射影平面上 n 本の特異ファイバーをもつザイフェルト多様体について述べる。

- 整数手術に限る。[24]
- $n = 2$ の例は存在するが、 $n \geq 3$ となるザイフェルト手術は知られていない。

宮崎-茂手木、Gordon、Eudave-Munöz [15] による次の予想は重要な未解決問題である。

予想 4.4 双曲結び目 K に対して、 $K(m/n)$ がザイフェルト多様体ならば、 $m/n \in \mathbb{Z}$ かつ $K(m/n)$ の特異ファイバーは高々 3 本である。

いうまでもなく、レンズ空間もザイフェルト多様体である。個々のザイフェルト手術を研究するのではなく、結び目全体に対するザイフェルト手術全体をネットワークとして捉えるという提案が今年、Deruelle-宮崎-茂手木 [14] によって発表された。結び目 K が整数ザイフェルト手術 m をもつとする。 K と交わらない自明な結び目で、手術後のザイフェルト多様体 $K(m)$ において、ファイバーになるようなものがあれば、それを組 (K, m) に対するザイフェルターとよぶ。ザイフェルターが存在すると、そこで結び目をねじることにより、ザイフェルト手術をもつ別の結

び目を無限に生産できる．個々のザイフェルト手術を頂点とし，ザイフェルターに沿った 1 回ひねりで移りあうときに辺で結ぶことにより，ネットワークを構成していく．これにより，その手術がなぜザイフェルト手術なのかという問いへの一つの回答を得ようとするものである．現時点では，任意のザイフェルト手術に対するザイフェルターの存在がわかっていないことや，ネットワークの連結性といった問題が残されているようだ．

予想 4.2 に対応するものとして，ザイフェルト手術は，John Dean [13] による primitive/Seifert 構成で説明できると Gordon [21] によって予想されていた．しかし，この予想に対する反例が Mattman-Miyazaki-Motegi [42] において与えられた． $(-3, 3, 5)$ -pretzel knot から twisting して得られる無限系列であり，種数 1，トンネル数 2 で strongly-invertible でない双曲結び目が述べられている．同論文 [42] において，Hyung-Jong Song が $(-3, 3, 3)$ -pretzel knot の 1-surgery もやはり primitive/Seifert 構成にのらないザイフェルト手術であることを見つけたという記述がある．筆者はこれと独立に， $(-3, 3, 3)$ -pretzel knot から twisting で得られる無限系列が，種数 1，トンネル数 2 で 1-surgery が primitive/Seifert 構成にのらないザイフェルト手術であることを証明した．こちらの無限系列は，[42] の例と違って strongly-invertible になっている．（[14] においても類似した結果が得られているが，証明はそちらの方が複雑である．）また，ザイフェルト手術をもつ双曲結び目で， S^3 の種数 2 の Heegaard 曲面にならないものが [14] で与えられている．

4.3 トロイダル手術

双曲結び目のトロイダル手術については，次の結果が基本となる．

定理 4.2 (Gordon-Luecke [24, 25, 26]) 双曲結び目 K に対して， $K(m/n)$ がトロイダルならば $|n| \leq 2$ ．さらに， $|n| = 2$ となるのは K が Eudave-Munöz knot のときに限る．

従って，Eudave-Munöz knot 以外の双曲結び目を対象とし，整数トロイダル手術のみを考察すればよいことになる．（一方で，Eudave-Munöz knot の例外的手術をすべて決定するといった問題は残されている．）

定理 4.3 ([53, 54]) 1. 任意の整数は，ある双曲結び目のトロイダル手術として実現される．

2. 種数 1 の双曲結び目のトロイダル手術は， $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ に限る．また， ± 4

は twist knot によってのみ実現される .

整数トroidal手術を許容する双曲結び目を決定するという課題は無謀であろう . 現時点では , Boyer-Zhang [8] , Brittenham-Wu [10] , Patton [50] , Wu [62] らによって , 交代結び目 , モンテシノス結び目においてはそういう手術を許容するものが決定されてはいる .

予想 4.5 (Eudave-Munõz [15]) 双曲結び目は , 高々 3 つのトroidal手術をもつ .

さらに , 3 つのトroidal手術を許容するのは , figure-eight knot と $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot に限られると思われる . 筆者は [55] において , 双曲結び目のトroidal手術は高々 5 つであること , さらに [56] において , Eudave-Munõz knot は高々 3 つのトroidal手術をもつことを証明したが , 最近 , 次の結果が出た .

定理 4.4 (Gordon-Wu [27]) 双曲結び目は , 高々 4 つのトroidal手術をもつ . もし 4 つあるならば , それらは連続した整数である .

トroidal手術の個数の評価は , トroidal手術間の距離を評価することで得られる . 古典的な結果として , figure-eight knot を除いて , 双曲結び目 K に対する 2 つのトroidal手術間の距離は 5 以下であることが知られていた [22] .

定理 4.5 ([53, 54]) 1. 距離が 5 であるような 2 つのトroidal手術を許容する双曲結び目は , Eudave-Munõz knot $k(2, -1, n, 0)$ ($n \neq 1$) に限る .

2. figure-eight knot を除けば , 双曲結び目に対する整数トroidal手術間の距離は高々 4 である .

Gordon-Wu [27] は , 距離が 4 であるような 2 つのトroidal手術をもつ双曲結び目を決定した .

定理 4.6 (Gordon-Wu [27], Valdez-Sánchez [59]) 距離が 4 であるような 2 つのトroidal手術を許容する双曲結び目は , twist knot 及び , $3/10$ -link の twisting で得られるものに限る .

距離が 3 であるような 2 つのトroidal手術を許容する双曲結び目は無限に存在するのだが , それらの特徴づけができれば予想 4.5 の解決にいたるであろう .

トroidal手術に対しては , 手術によって生成される本質的トーラスと手術において貼り付けたソリッドトーラスのコアとの最小交点数が , ある意味そのトroidal

イダル手術の複雑さを示している．半整数トロイダル手術の場合，その値は常に 2 である．2 より大きい値を実現することはできるかという問題に対して，Eudave-Munöz [16] が値 4 を実現してみせた．Eudave-Munöz の例は，strongly-invertible で，トンネル数 1 の双曲ファイバー結び目である．筆者は，値 4 を実現する別の無限列を構成した．それは $(-3, 3, 7)$ -pretzel knot から twisting で得られる系列で，strongly-invertible ではなく，トンネル数 2，種数 1 という性質をもつ．従ってファイバー結び目でもなく，Eudave-Munöz の例とはまったく系統の違うものであることがわかる．

トロイダル手術の多くは，手術で得られる多様体にザイフェルト多様体が部分多様体として (JSJ-分解におけるピースとして) 含まれている．そこで，もとの結び目と交わらない自明な結び目であって，手術後に発生するあるザイフェルト部分多様体のファイバーになるものを，[14] によるザイフェルターの類似概念として，局所ザイフェルターとよべば，本稿での全てのトロイダル手術の例において，局所ザイフェルターが存在することがわかっている．全てのザイフェルト手術に対してザイフェルターが存在するかという問いに倣って，局所ザイフェルターの存在を問うこともできる．

5 例外的手術の配列

巡回手術定理 4.1，予想 4.4 及び定理 4.2 を考慮すれば，整数例外的手術に限定することは本質的な制限とはいえない．既知の例外的手術の例を検討すると，自然に次が予想される．

- 予想 5.1
1. 双曲結び目に対する整数例外的手術は，連続した整数からなる．
 2. 双曲結び目が整数トロイダル手術 m をもてば， $m - 1$ か $m + 1$ の少なくとも一方は例外的でない．

複数の例外的手術をもつ結び目は多く知られていたが，pentangle とよばれるタングルを利用した構成法によって，興味深い例を構成できる．まずは，レンズ空間手術を含まない配列についての実現を考える．以下， L, S, T という表示は，それぞれレンズ空間手術，ザイフェルト手術，トロイダル手術に対応する．

定理 5.1 任意の整数 m に対して，次の (1)-(4) の例外的手術の配列をもつトンネル数 1 の双曲結び目がそれぞれ存在する．

- (1) $(m, m + 1) = (T, T)$.
- (2) $(m, m + 1, m + 2) = (T, S, T)$.
- (3) $(m, m + 1, m + 2, m + 3) = (T, S, S, T)$.
- (4) $(m, m + 1, m + 2, m + 3) = (S, S, S, T)$ (if $m \neq 0$), $(m, m + 1, m + 2) = (S, S, S)$ (if $m = 0$).

先に述べたことではあるが、任意の整数 m に対して、それをトroidal手術にもつ双曲結び目の存在は [53] によって示された。また、 m を Ziffert手術にもつ双曲結び目の存在は Motegi-Song [46] によって得られていた。なお、(3) に関連した配列 (S, S) は Ishihara [32] によって、(3) そのものも Martelli-Petronio [41] によって、そして (4) に関連した配列 (S, S, S) は Deruelle-Miyazaki-Motegi [14] によっても得られている。おそらく、配列 (S, S, S, S) は実現できないだろう。

問題 5.1 4 連続整数で Ziffert手術が出現することはあるか。

次に、レンズ空間手術を含んだ配列を考えると、Berge の予想 4.1, 4.2 を考慮すれば、定理 5.1 のように、任意の整数から始めることは期待できない。現時点では、次のような配列は実現可能である。

定理 5.2 $X, Y \in \{S, T\}$ とする。配列 (X, L, Y) を実現するトンネル数 1 の双曲結び目が、無限個存在する。

特に、配列 (T, L, T) を実現する双曲結び目の存在は、Boyer-Zhang [8, p.77] における予想の反例を与えている。また、ここで構成した例において、片方のトroidal手術は、射影平面上 2 本の特異ファイバーをもつ Ziffert多様体を与えていることを付記しておく。

例外的手術の例としてしばしば引用される [6, 9, 17] で述べられている例を調べると、例外的手術が単独で存在しているものは見当たらない。つまり、例外的手術は単独では出現しにくいのではないかと予想される。Berge knot の場合も、trefoil あるいは figure-eight knot の fiber surface 上における 2 つの族を除けば、レンズ空間手術に例外的手術が隣接している。([17, p121] において、John Dean がただ 1 つだけ Ziffert手術をもつ例を作ったと記述されている。しかしそれを記述した Dean による文献はない。Eudave-Munõz に確認したところ、private にきいたということだった。)

定理 5.3 ([58]) 整数スロープの中で孤立したレンズ空間手術 (Ziffert手術,

トロイダル手術)をもつトンネル数 1 の双曲結び目が無限に存在する .

整数スロープの中で孤立するという意味は , 問題の例外的手術が整数 m に対応し , かつ $m-1$ 及び $m+1$ が例外的でないときをいう . 孤立したトロイダル手術の例は , 種数 1 の結び目を考えれば明らかであるが , レンズ空間手術とザイフェルト手術に関しては , 上述した Eudave-Muñoz のコメントを除けば , 先行研究はない .

参考文献

- [1] I. Agol, *Bounds on exceptional Dehn filling*, Geom. Topol. **4** (2000), 431–449 (electronic).
- [2] K. Baker, *Surgery descriptions and volumes of Berge knots I: Large volume Berge knots*, preprint, arXiv:math.GT/0509054.
- [3] K. Baker, *Surgery descriptions and volumes of Berge knots II: Descriptions on the minimally twisted five chain link*, preprint, arXiv:math.GT/0509055.
- [4] K. Baker, *Small genus knots in lens spaces have small bridge number*, preprint.
- [5] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript.
- [6] S. Bleiler and C. Hodgson, *Spherical space forms and Dehn filling*, Topology **35** (1996), 809–833.
- [7] S. Bleiler and R. Litherland, *Lens spaces and Dehn surgery*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 1127–1131.
- [8] S. Boyer and X. Zhang, *Cyclic surgery and boundary slopes*, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 62–79, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [9] S. Boyer and X. Zhang, *Finite Dehn surgery on knots*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 1005–1050.
- [10] M. Brittenham and Y. Q. Wu, *The classification of exceptional Dehn surgeries on 2-bridge knots*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), 97–113.
- [11] H. D. Cao and X. P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math. **10** (2006), 165–498.

- [12] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987), 237–300.
- [13] J. Dean, *Small Seifert-fibered Dehn surgery on hyperbolic knots*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 435–472.
- [14] A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi, *Networking Seifert fibered surgeries on knots*, preprint.
- [15] M. Eudave-Munõz, *Non-hyperbolic manifolds obtained by Dehn surgery on hyperbolic knots*, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 35–61, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [16] M. Eudave-Munõz, *4-punctured tori in the exteriors of knots*, J. Knot Theory Ramifications **6** (1997), 659–676.
- [17] M. Eudave-Munõz, *On hyperbolic knots with Seifert fibered Dehn surgeries*, Proceedings of the First Joint Japan-Mexico Meeting in Topology (Morelia, 1999). Topology Appl. **121** (2002), 119–141.
- [18] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds. III*, J. Differential Geom. **26** (1987), 479–536.
- [19] P. Ghiggini, *Knot Floer homology detects genus-one fibered links*, preprint, [arXiv:math.GT/0603445](https://arxiv.org/abs/math/0603445).
- [20] H. Goda and M. Teragaito, *Dehn surgeries on knots which yield lens spaces and genera of knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **129** (2000), 501–515.
- [21] C. McA. Gordon, *Dehn filling: a survey*, in Knot theory (Warsaw, 1995), 129–144, Banach Center Publ., 42, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.
- [22] C. McA. Gordon, *Boundary slopes of punctured tori in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 1713–1790.
- [23] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 371–415.
- [24] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Dehn surgeries on knots creating essential tori. I*, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), 597–644.
- [25] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Dehn surgeries on knots creating essential tori. II*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 671–725.
- [26] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Non-integral toroidal Dehn surgeries*, Comm. Anal. Geom. **12** (2004), 417–485.

- [27] C. McA. Gordon and Y. Q. Wu, *Toroidal Dehn fillings on hyperbolic 3-manifolds*, to appear in *Memoirs Amer. Math. Soc.*
- [28] P. Hill and K. Murasugi, *On double-torus knots. II*, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), 617–667.
- [29] C. Hodgson and S. Kerckhoff, *Universal bounds for hyperbolic Dehn surgery*, *Ann. of Math.* **162** (2005), 367–421.
- [30] K. Ichihara, *Integral non-hyperbolic surgeries*, preprint, [arXiv:math.GT/0410045](https://arxiv.org/abs/math/0410045).
- [31] K. Ichihara, T. Saito and M. Teragaito, *Alexander polynomials of doubly primitive knots*, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*, [arXiv:math.GT/0506157](https://arxiv.org/abs/math/0506157).
- [32] K. Ishihara, *On Dehn surgeries of tunnel number one knots and links*, preprint.
- [33] T. Kadokami, *Reidemeister torsion of homology lens spaces*, preprint.
- [34] T. Kadokami and Y. Yamada, *A deformation of the Alexander polynomials of knots yielding lens spaces*, preprint.
- [35] T. Kadokami and Y. Yamada, *Reidemeister torsion and lens surgeries on $(-2, m, n)$ -pretzel knots*, preprint.
- [36] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Edited by Rob Kirby, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.2, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 35–473, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [37] P. Kronheimer and T. Mrowka, *Witten’s conjecture and property P*, *Geom. Topol.* **8** (2004), 295–310 (electronic).
- [38] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, to appear in *Ann. of Math.*, [arXiv:math.GT/0310164](https://arxiv.org/abs/math/0310164).
- [39] M. Lackenby, *Word hyperbolic Dehn surgery*, *Invent. Math.* **140** (2000), 243–282.
- [40] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, *Ann. of Math.* **76** (1962), 531–540.
- [41] B. Martelli and C. Petronio, *Dehn filling of the “magic” 3-manifold*, preprint, [arXiv:math.GT/02042282](https://arxiv.org/abs/math/02042282).
- [42] T. Mattman, K. Miyazaki and K. Motegi, *Seifert-fibered surgeries which do not arise from primitive/Seifert-fibered constructions*, *Trans. Amer.*

- Math. Soc. **358** (2006), 4045–4055.
- [43] K. Miyazaki and K. Motegi, *Seifert fibered manifolds and Dehn surgery II*, Math. Ann. **311** (1998), 647–664.
- [44] J. Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré Conjecture*, preprint, [arXiv:math.DG/0607607](https://arxiv.org/abs/math/0607607).
- [45] L. Moser, *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math. **38** (1971), 737–745.
- [46] K. Motegi and H. J. Song, *All integral slopes can be Seifert fibered slopes for hyperbolic knots*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 369–378 (electronic).
- [47] Y. Ni, *Knot Floer homology detects fibered knots*, preprint, [arXiv:math.GT/0607156](https://arxiv.org/abs/math/0607156).
- [48] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology **44** (2005), 1281–1300.
- [49] P. Ozsváth and Z. Szabó, *The Dehn surgery characterization of the trefoil and the figure eight knot*, preprint, [arXiv:math.GT/0604079](https://arxiv.org/abs/math/0604079).
- [50] R. Patton, *Incompressible punctured tori in the complements of alternating knots*, Math. Ann. **301** (1995), 1–22.
- [51] J. Rasmussen, *Lens space surgeries and a conjecture of Goda and Teragaito*, Geom. Topol. **8** (2004), 1013–1031.
- [52] M. Scharlemann, *Producing reducible 3-manifolds by surgery on a knot*, Topology **29** (1990), 481–500.
- [53] M. Teragaito, *Toroidal surgeries on hyperbolic knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2803–2808.
- [54] M. Teragaito, *Toroidal surgeries on hyperbolic knots. II*, Asian J. Math. **7** (2003), 139–146.
- [55] M. Teragaito, *Distance between toroidal surgeries on hyperbolic knots in the 3-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 1051–1075.
- [56] M. Teragaito, *On hyperbolic knots realizing the maximal distance between toroidal surgeries*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), 101–119.
- [57] M. Teragaito, *Toroidal Dehn fillings on large hyperbolic 3-manifolds*, to appear in Comm. Anal. Geom.
- [58] M. Teragaito, *Isolated exceptional Dehn surgeries on hyperbolic knots*, preprint.

- [59] L. Valdez-Sanchez, private communication.
- [60] A. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, *Canad. J. Math.* **12** (1960), 503–528.
- [61] Y. Q. Wu, *Cyclic surgery and satellite knots*, *Topology Appl.* **36** (1990), 205–208.
- [62] Y. Q. Wu, *The classification of toroidal Dehn surgeries on Montesinos knots*, to appear in *Topology*.
- [63] Y. Yamada, *Lens surgeries as A'Campo's divide knots*, preprint.