

B 電磁場の量子化 — photon —

B.1 電磁場のエネルギー

電磁場の全エネルギー W は、電磁気学により、

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + |\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|^2) d\mathbf{r} \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。この式に (A.16) と (A.17) を代入してエネルギーを計算する。まず、電場のエネルギーの積分は、

$$\begin{aligned} \int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} &= \int_V \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \eta, \eta'} \frac{4\pi c^2}{V} \int_V \mathbf{k}' k' (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta}) \\ &\quad \cdot \{q_{\mathbf{k}'\eta'}^* e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_{k'} t)} - q_{\mathbf{k}'\eta'} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_{k'} t)}\} \cdot \{q_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}\} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \eta, \eta'} \frac{4\pi c^2}{V} \int_V \mathbf{k}' k' (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta}) \\ &\quad \cdot \{q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'}) t} + q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_k - \omega_{k'}) t} \\ &\quad - q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'}) t} - q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_k + \omega_{k'}) t}\} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \eta, \eta'} 4\pi c^2 \mathbf{k}' k' (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta}) \\ &\quad \cdot \{q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ &\quad - q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} - q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{i(\omega_k + \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} 4\pi c^2 k^2 (q_{\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta} + q_{\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta}^* - q_{-\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta} e^{-2i\omega_k t} - q_{-\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{2i\omega_k t}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる^{*165)}。

磁場のエネルギーの積分も同様にして、

$$\begin{aligned} \int_V |\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} &= \int_V \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \eta, \eta'} \frac{4\pi c^2}{V} \int_V (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'}) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta}) \\ &\quad \cdot \{q_{\mathbf{k}'\eta'}^* e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_{k'} t)} - q_{\mathbf{k}'\eta'} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_{k'} t)}\} \cdot \{q_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}\} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \eta, \eta'} \frac{4\pi c^2}{V} \int_V (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'}) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta}) \\ &\quad \cdot \{q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'}) t} + q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_k - \omega_{k'}) t} \\ &\quad - q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'}) t} - q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_k + \omega_{k'}) t}\} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \eta, \eta'} 4\pi c^2 (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'}) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta}) \\ &\quad \cdot \{q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{i(\omega_k - \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\ &\quad - q_{\mathbf{k}'\eta'} q_{\mathbf{k}\eta} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} - q_{\mathbf{k}'\eta'}^* q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{i(\omega_k + \omega_{k'}) t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} 4\pi c^2 k^2 (q_{\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta} + q_{\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta}^* + q_{-\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta} e^{-2i\omega_k t} + q_{-\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta}^* e^{2i\omega_k t}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

^{*165)} $(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta})$ は $\eta' = \eta$ のとき 1, そうでないとき 0 である。

となる^{*166)}。

したがって、両エネルギーを足し合わせると、

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} c^2 k^2 (q_{\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta} + q_{\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta}^*) \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} \omega_k^2 (q_{\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta} + q_{\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta}^*) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となる。

B.2 調和振動子との等価性

複素数である $q_{\mathbf{k}\eta}$ と $q_{\mathbf{k}\eta}^*$ に代わって、実変数 $Q_{\mathbf{k}\eta}$ と $P_{\mathbf{k}\eta}$ を導入しよう^{*167)}。

$$Q_{\mathbf{k}\eta} = q_{\mathbf{k}\eta} + q_{\mathbf{k}\eta}^* \quad (\text{B.5})$$

$$iP_{\mathbf{k}\eta} = \omega_k (q_{\mathbf{k}\eta} - q_{\mathbf{k}\eta}^*) \quad (\text{B.6})$$

これらの逆は、

$$q_{\mathbf{k}\eta} = (\omega_k Q_{\mathbf{k}\eta} + iP_{\mathbf{k}\eta}) / 2\omega_k \quad (\text{B.7})$$

$$q_{\mathbf{k}\eta}^* = (\omega_k Q_{\mathbf{k}\eta} - iP_{\mathbf{k}\eta}) / 2\omega_k \quad (\text{B.8})$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta} &= \frac{P_{\mathbf{k}\eta}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\eta}^2 + i\omega_k (Q_{\mathbf{k}\eta} P_{\mathbf{k}\eta} - P_{\mathbf{k}\eta} Q_{\mathbf{k}\eta})}{4\omega_k^2} \\ q_{\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta}^* &= \frac{P_{\mathbf{k}\eta}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\eta}^2 - i\omega_k (Q_{\mathbf{k}\eta} P_{\mathbf{k}\eta} - P_{\mathbf{k}\eta} Q_{\mathbf{k}\eta})}{4\omega_k^2} \end{aligned}$$

となるから、

$$q_{\mathbf{k}\eta}^* q_{\mathbf{k}\eta} + q_{\mathbf{k}\eta} q_{\mathbf{k}\eta}^* = \frac{1}{2\omega_k^2} (P_{\mathbf{k}\eta}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\eta}^2) \quad (\text{B.9})$$

である。したがって、電磁場のエネルギーは、

$$W = \sum_{\mathbf{k}, \eta} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}\eta}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\eta}^2) \quad (\text{B.10})$$

と書ける。

これは、調和振動子のハミルトニアンと形式的には全く同一である^{*168)}。つまり、 \mathbf{k} と η で指定される1つの電磁場が、固有振動数 ω_k をもつ1つの1次元調和振動子に対応しているわけである。

^{*166)} $(\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\eta'}) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta})$ は $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ と $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ のいずれの場合でも、 $\eta' = \eta$ のときしか値をもたない。ただし、前者の場合、 k^2 、後者の場合 $-k^2$ になる。

^{*167)} 複素数では実部と虚部でパラメータは2つ。実変数では Q と P で、やはりパラメータは2つ。

^{*168)}

$$p = \sqrt{m}P, \quad x = \frac{Q}{\sqrt{m}}$$

という関係を定義して変換を行うと、

$$H = \frac{1}{2} (P^2 + \omega^2 Q^2) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

となる。

B.3 電磁場の量子化

(B.10) はまだ古典的なハミルトニアンである。つぎは、これを量子化しよう。それには、 $Q_{\mathbf{k}\eta}$ と $P_{\mathbf{k}\eta}$ の交換関係

$$[Q_{\mathbf{k}\eta}, P_{\mathbf{k}\eta}] = Q_{\mathbf{k}\eta}P_{\mathbf{k}\eta} - P_{\mathbf{k}\eta}Q_{\mathbf{k}\eta} = i\hbar \quad (\text{B.11})$$

を導入すればよい^{*169)}。

$P_{\mathbf{k}\eta}$ や $Q_{\mathbf{k}\eta}$ は実数量であるが、これを1つの虚数演算子 $a_{\mathbf{k}\eta}$ で表現し、その実部が $Q_{\mathbf{k}\eta}$ 、虚部が $P_{\mathbf{k}\eta}$ に対応すると考えることにする。すなわち、

$$\omega_k Q_{\mathbf{k}\eta} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a_{\mathbf{k}\eta} + a_{\mathbf{k}\eta}^*) \quad (\text{B.12})$$

$$iP_{\mathbf{k}\eta} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(a_{\mathbf{k}\eta} - a_{\mathbf{k}\eta}^*) \quad (\text{B.13})$$

と定義する。すると、交換関係は

$$\begin{aligned} [Q_{\mathbf{k}\eta}, P_{\mathbf{k}\eta}] &= \frac{\hbar}{2i} \{ (a_{\mathbf{k}\eta} + a_{\mathbf{k}\eta}^*)(a_{\mathbf{k}\eta} - a_{\mathbf{k}\eta}^*) \\ &\quad - (a_{\mathbf{k}\eta} - a_{\mathbf{k}\eta}^*)(a_{\mathbf{k}\eta} + a_{\mathbf{k}\eta}^*) \} \\ &= \frac{\hbar}{i} (a_{\mathbf{k}\eta}^* a_{\mathbf{k}\eta} - a_{\mathbf{k}\eta} a_{\mathbf{k}\eta}^*) \equiv i\hbar \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

より、

$$a_{\mathbf{k}\eta} a_{\mathbf{k}\eta}^* - a_{\mathbf{k}\eta}^* a_{\mathbf{k}\eta} = 1 \quad (\text{B.15})$$

に置き換えられる。

これを使うと、電磁場のハミルトニアンは、(B.10) より、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}\eta}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\eta}^2) \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} \frac{\hbar\omega_k}{4} \{ -(a_{\mathbf{k}\eta} - a_{\mathbf{k}\eta}^*)^2 + (a_{\mathbf{k}\eta} + a_{\mathbf{k}\eta}^*)^2 \} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} \frac{\hbar\omega_k}{2} (a_{\mathbf{k}\eta} a_{\mathbf{k}\eta}^* + a_{\mathbf{k}\eta}^* a_{\mathbf{k}\eta}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \eta} \hbar\omega_k \left(a_{\mathbf{k}\eta}^* a_{\mathbf{k}\eta} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

となる。これで調和振動子のハミルトニアンと全く同じ形式のものが得られた。

$a_{\mathbf{k}\eta}^* a_{\mathbf{k}\eta}$ は数演算子であり、整数 $n (\geq 0)$ を固有値としてもつ。したがって、 $\mathbf{k}\eta$ で指定される電磁場の固有エネルギーは $(n_{\mathbf{k}\eta} + 1/2)\hbar\omega_k$ である。また、 $a_{\mathbf{k}\eta}^*$ と $a_{\mathbf{k}\eta}$ はそれぞれ生成および消滅演算子であり、 $\mathbf{k}\eta$ の電磁場固有関数を $|n_{\mathbf{k}\eta}\rangle$ と書いたとき、

$$a_{\mathbf{k}\eta}^* |n_{\mathbf{k}\eta}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\eta} + 1} |n_{\mathbf{k}\eta} + 1\rangle \quad (\text{B.17})$$

$$a_{\mathbf{k}\eta} |n_{\mathbf{k}\eta}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\eta}} |n_{\mathbf{k}\eta} - 1\rangle \quad (\text{B.18})$$

という作用をする。すなわち、 $a_{\mathbf{k}\eta}^*$ は $\mathbf{k}\eta$ で指定される状態の光子 (photon) を1個生成させる働きをもち、 $a_{\mathbf{k}\eta}$ は1個消滅させる働きをもつ演算子であると考えることができる。

^{*169)} これは、 $P_{\mathbf{k}\eta} = -i\hbar\partial/\partial Q_{\mathbf{k}\eta}$ とすることに他ならない。

最後に、これらの生成消滅演算子をつかって、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ を書き表しておこう。(B.7), (B.8), (B.12), (B.13) より、

$$q_{\mathbf{k}\eta} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}\eta}, \quad q_{\mathbf{k}\eta}^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}\eta}^*$$

の関係があることと、(A.11), (A.15), (A.16), (A.17) から、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\mathbf{k}, \eta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(a_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + a_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\mathbf{k}, \eta} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(a_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\mathbf{k}, \eta} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\eta} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(a_{\mathbf{k}\eta} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - a_{\mathbf{k}\eta}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right) \quad (\text{B.21})$$

となる。

これを見ると、電場にも磁場にも生成消滅演算子が1個ずつ入っている。これにより、光子が生まれたり消えたりする量子力学的な過程を記述することができる。例えば、負の電荷 $-e$ をもつ電子に電磁波の電場が作用して、 $-e\mathbf{E}$ の摂動ハミルトニアンが加わると、 $\mathbf{k}\eta$ の光子が n 個あった状態と $n \pm 1$ 個になった状態との間に行列要素が生じ、光子が1個消えたり生まれたりする。電磁場の波動方程式 (A.6) は、電磁場の「波」としての性質を表す方程式であったのに対し、ここで数演算子や生成消滅演算子で表現されている内容は、電磁波の「粒子」としての性質を表している。

B.4 位相部分の表記法

電磁波を記述する際、位相部分を $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ とする流儀と、 $(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ とする流儀とがある。確かに、 \hat{z} 方向に進む σ 偏光の波を $\varepsilon_{\sigma} \cos(kz - \omega t)$ と表記しても $\varepsilon_{\sigma} \sin(\omega t - kz)$ と表記しても、時間の原点をずらせば結局は同じである。しかし、円偏光を記述する際には、この流儀の違いが逆の結果を生む。ちょっと図に描いてみるとわかるが、

$$\varepsilon_{\sigma} \cos(kz - \omega t) + \varepsilon_{\pi} \cos(kz - \omega t + \pi/2) \quad \text{と} \quad \varepsilon_{\sigma} \cos(\omega t - kz) + \varepsilon_{\pi} \cos(\omega t - kz + \pi/2)$$

とでは、 ε_{π} の位相はどちらも $+\pi/2$ なのに^{*170)}、逆回りの状態を記述してしまうのである。これはどういうことなのか考えるため、(A.7) に戻って

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (\text{B.22})$$

としてみる。結果は、全く同じ (B.19) になる。したがって、(B.20) と (B.21) も同じである。これは考えてみれば当たり前で、もともと (A.12) で共役を足し合わせる形になっているので、ここで q と q^* もいっしょに入れ換えてしまえば、全く同じ式になってしまうからである。

どちらの位相表記を使ってもベクトルポテンシャルの表記 (B.19) は変わらないが、

$$\text{消滅演算子 } a_{\mathbf{k}\eta} \text{ には時間変化 } e^{-i\omega t} \text{ がつき、生成演算子 } a_{\mathbf{k}\eta}^* \text{ には時間変化 } e^{i\omega t} \text{ がつく}$$

という点は意識しておくべきであろう。これは、消滅演算子が働く遷移過程では光子のエネルギー $\hbar\omega$ が電子系に与えられ、生成演算子が働くときは電子系から $\hbar\omega$ のエネルギーをもらって光子が放出されることに対応している。これを逆の組み合わせにしてみると、おかしいことになってしまう。

*170) 指数関数で表すと、 π 成分のほうに $e^{i\pi/2}$ をかけることに相当する。