

圧縮センシングの基礎と応用 —天文学への応用を例に—

植村誠 （広島大学）

2016年チュートリアル講演会

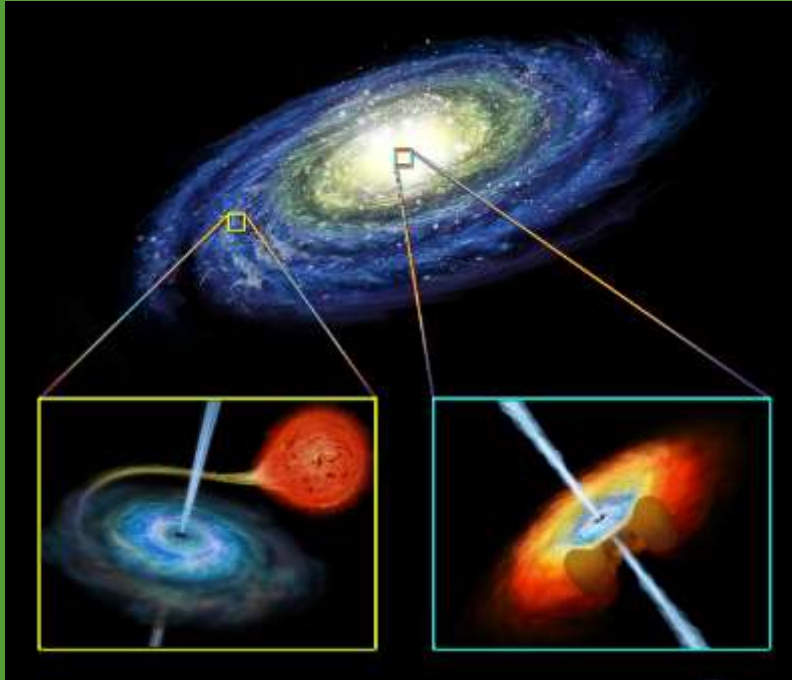
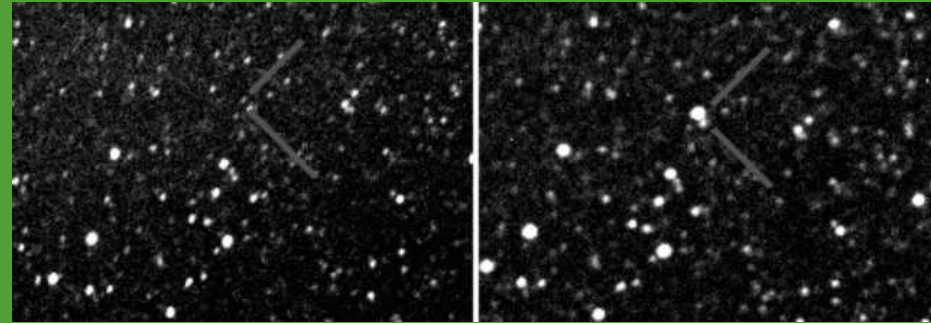
@東工大すすかけ台キャンパス 2016.12.18

自己紹介

博士（理学） 2004年京都大学

専門：観測天文学、特にコンパクト天体
周辺の質量降着に伴う突発天体現象

2013～ 新学術「スペースモデリング」
計画研究（天文班）分担者



連立一次方程式を解こう！

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

データ $\mathbf{y}$ は N 個の変数の線形結合で得られる

$M \geq N$ なら最小二乗法などで解ける

$M < N$ なら解が 1 つに決まらない

実験：行列 $\mathbf{A}$ は既知のものとして、50 個のデータから 100 個の係数を推定する。

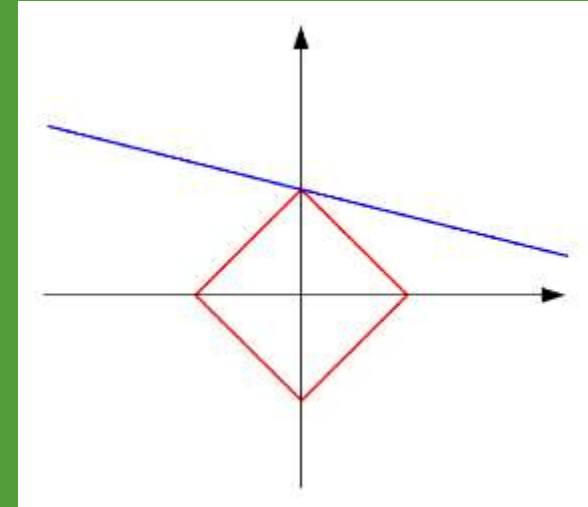
デモ

少ないデータから多くの係数が推定できた！

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^M |x_i|^p \right)^{1/p} = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_M|^p}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$$



スパースなベクトルは1次ノルム正則化で解ける。

圧縮センシング

完全再構成の条件、etc.

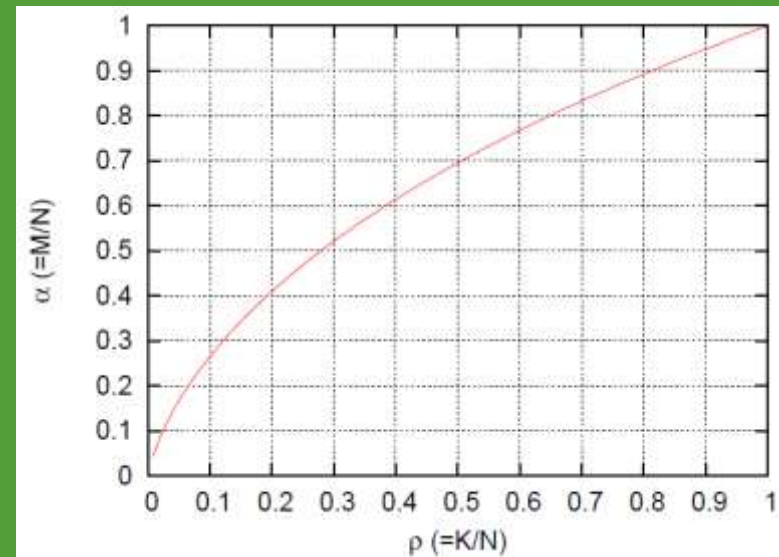
(Candes & Tao 2006, Donoho 2006)

LASSO

スパース回帰 (Tibshirani 1996)

$\mathbf{x}$ そのものがスパースでなくても、 $\mathbf{x}' (=B\mathbf{x})$ がスパースなら解ける。

Condition for perfect reconstruction of sparse vectors:
Sparsity (K/N) v.s. Data size (M/N)



Outline

情報のスパース性を利用して解けない問題を解いてしまう

周期的な変光星のパワースペクトル推定

Kato & Uemura, 2012, PASJ, 64, 122

電波干渉計の画像再構成

Honma, Akiyama, Uemura, & Ikeda, 2014, PASJ, 66, 95

ドップラー・トモグラフィ

Uemura, Kato, Nogami, & Mennickent, 2015, PASJ, 67, 22

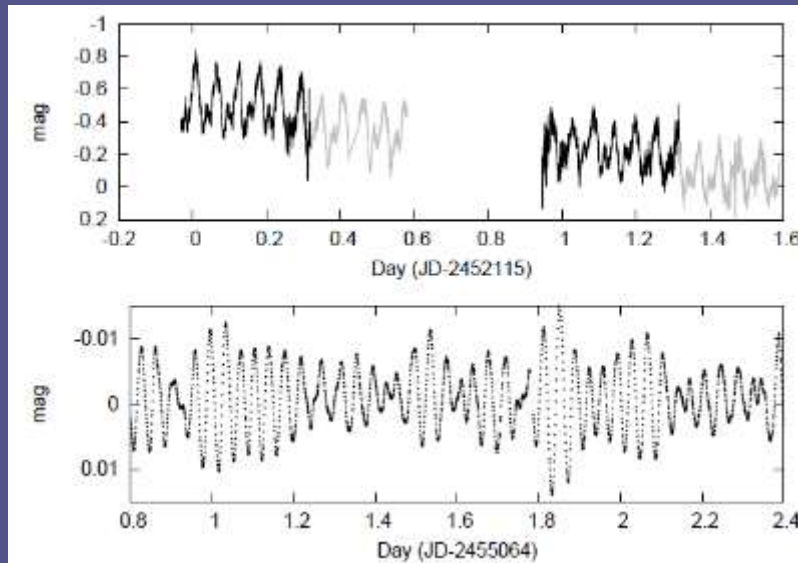
データから重要な説明変数を選択する

la型超新星の極大等級の変数選択

Uemura, Kawabata, Ikeda, Maeda, 2015, PASJ, 67, 55

周期的な変光星のパワースペクトル推定

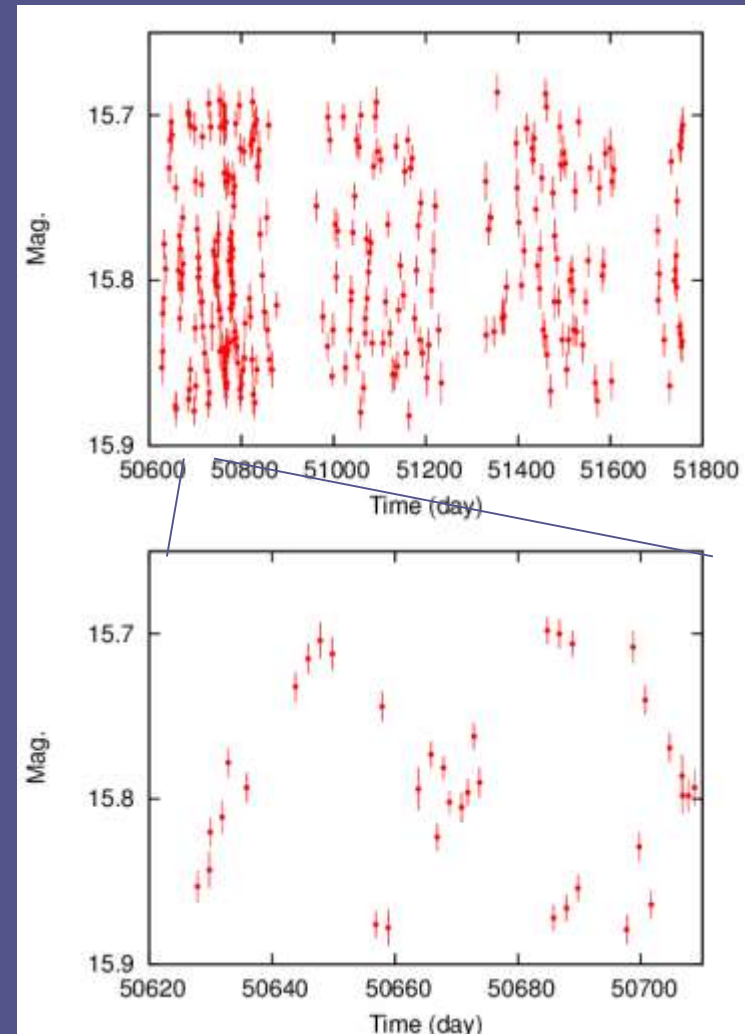
天体の明るさの時系列データ = 光度曲線



天体の明るさの時系列データから周期を知りたい。

データが一様にサンプリングされていない → 複雑な窓関数 → エイリアス

パワースペクトルはスパースなはず
= せいぜい数個の周期の重ね合わせでしかない



問題

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \cancel{y_a} \\ \cancel{y_b} \\ \cancel{y_c} \\ y_d \\ y_e \\ \cancel{y_f} \\ \cancel{y_g} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1 \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_1 \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_1 \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_1 \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_2 \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_2 \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_2 \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_2 \nu_{N/2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cancel{\cos(2\pi t_a \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cos(2\pi t_a \nu_{N/2})} & \cancel{\sin(2\pi t_a \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\sin(2\pi t_a \nu_{N/2})} \\ \cancel{\cos(2\pi t_b \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cos(2\pi t_b \nu_{N/2})} & \cancel{\sin(2\pi t_b \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\sin(2\pi t_b \nu_{N/2})} \\ \cancel{\cos(2\pi t_c \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cos(2\pi t_c \nu_{N/2})} & \cancel{\sin(2\pi t_c \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\sin(2\pi t_c \nu_{N/2})} \\ \cos(2\pi t_d \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_d \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_d \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_d \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_e \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_e \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_e \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_e \nu_{N/2}) \\ \cancel{\cos(2\pi t_f \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cos(2\pi t_f \nu_{N/2})} & \cancel{\sin(2\pi t_f \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\sin(2\pi t_f \nu_{N/2})} \\ \cancel{\cos(2\pi t_g \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\cos(2\pi t_g \nu_{N/2})} & \cancel{\sin(2\pi t_g \nu_1)} & \cancel{\cdots} & \cancel{\sin(2\pi t_g \nu_{N/2})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi t_N \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_N \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_N \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_N \nu_{N/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N/2} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N/2} \end{pmatrix}$$

逆フーリエ変換を $\sin$ と $\cos$ の畳み込みで表す。

本来は光度曲線データの数と係数ベクトルの次元が等しくないといけない。

しかし、天候などの要因で欠損部分がでる。

欠損部分を無視してフーリエ変換 = 欠損部分に“0”を入れる

→ エイリアスの出現

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_d \\ y_e \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1 \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_1 \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_1 \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_1 \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_2 \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_2 \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_2 \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_2 \nu_{N/2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi t_a \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_a \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_a \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_a \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_b \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_b \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_b \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_b \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_c \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_c \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_c \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_c \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_d \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_d \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_d \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_d \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_e \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_e \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_e \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_e \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_f \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_f \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_f \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_f \nu_{N/2}) \\ \cos(2\pi t_g \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_g \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_g \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_g \nu_{N/2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi t_N \nu_1) & \cdots & \cos(2\pi t_N \nu_{N/2}) & \sin(2\pi t_N \nu_1) & \cdots & \sin(2\pi t_N \nu_{N/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N/2} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N/2} \end{pmatrix}$$

LASSO で解く

“0”で埋めないで、**パワースペクトルがスパース**であることを事前情報として利用する

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}\mathbf{x}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_1\nu_1) & \cdots & \cos(t_1\nu_N) & \sin(t_1\nu_1) & \cdots & \sin(t_1\nu_N) \\ \cos(t_2\nu_1) & \cdots & \cos(t_2\nu_N) & \sin(t_2\nu_1) & \cdots & \sin(t_2\nu_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(t_M\nu_1) & \cdots & \cos(t_M\nu_N) & \sin(t_M\nu_1) & \cdots & \sin(t_M\nu_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

光度曲線（データ）

逆フーリエ変換

振幅

→パワースペクトル

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathcal{F}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1$$

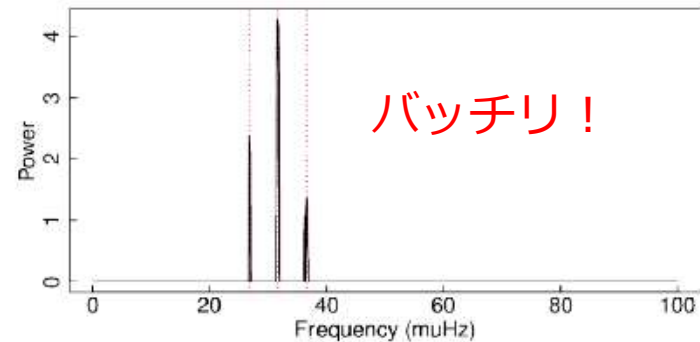
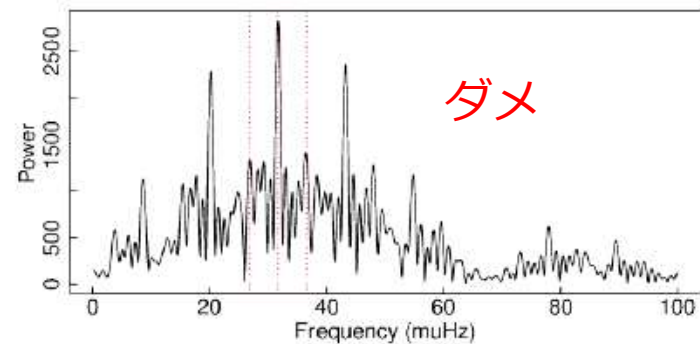
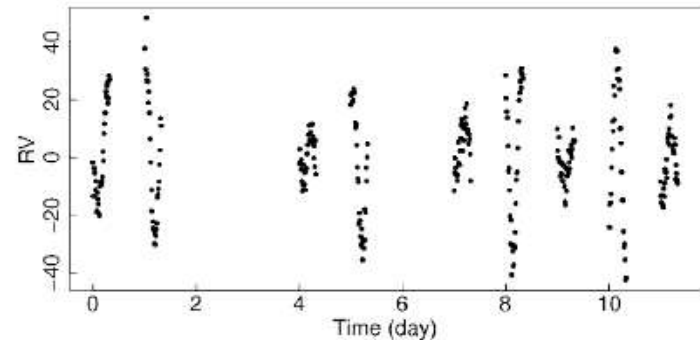
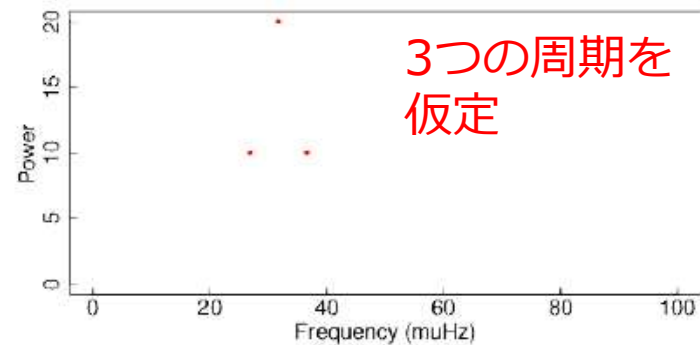
人工データを使った実験

仮定する信号

光度曲線（シミュレーション）

通常のパワースペクトル

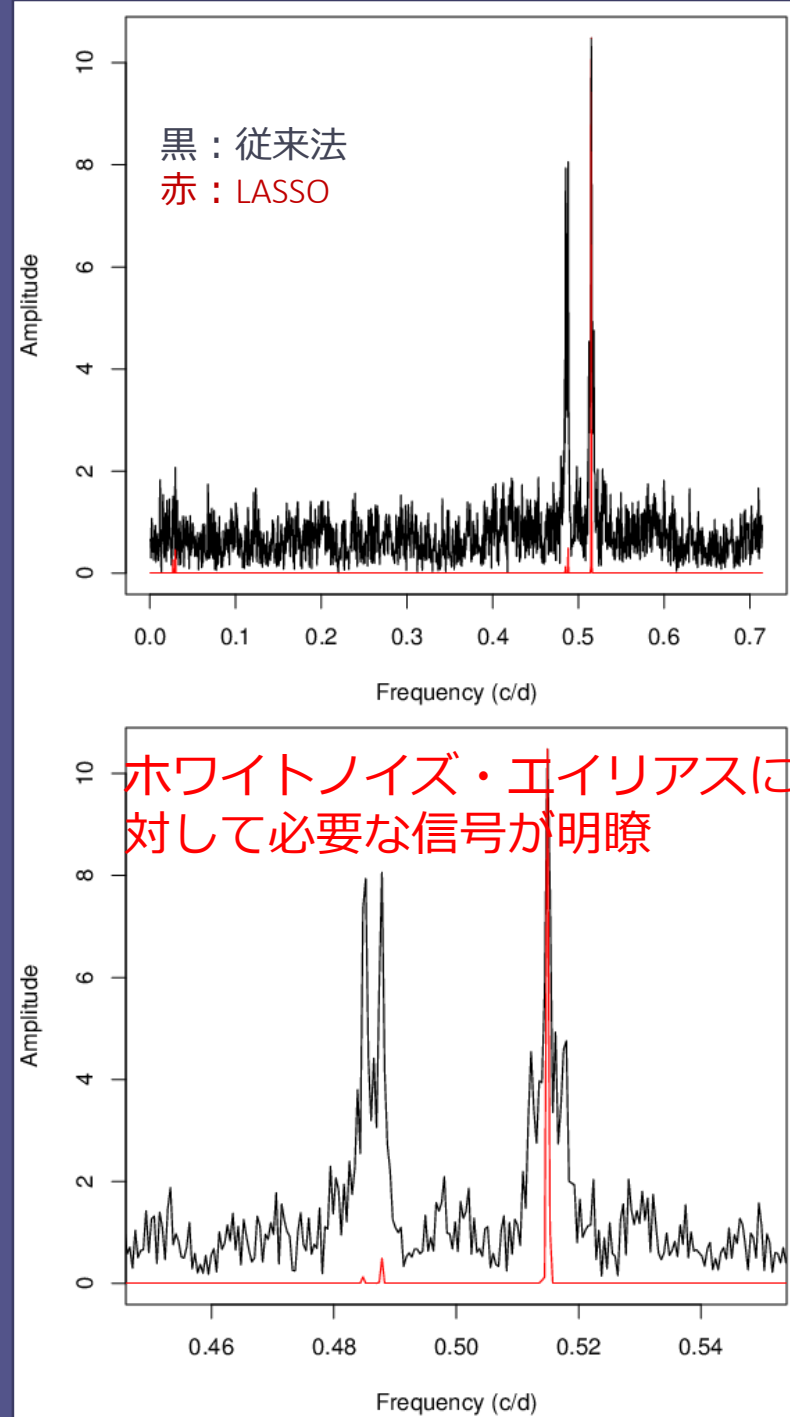
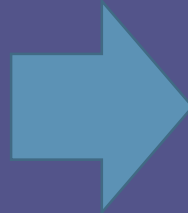
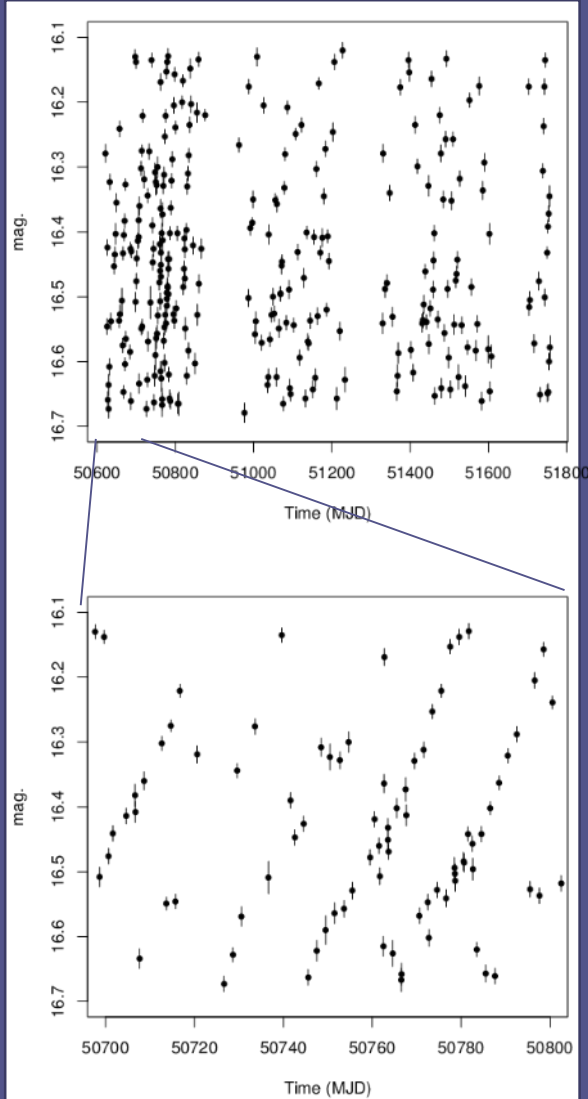
LASSOで推定した
パワースペクトル



実データの例

11/48

光度曲線



グループLASSO で解く

本来は $\cos$ の係数 a と $\sin$ の係数 b は周波数ごとにゼロか非ゼロになるべき。

→ グループLASSO

グループごとの1次ノルム

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_1\nu_1) & \cdots & \cos(t_1\nu_N) & \sin(t_1\nu_1) & \cdots & \sin(t_1\nu_N) \\ \cos(t_2\nu_1) & \cdots & \cos(t_2\nu_N) & \sin(t_2\nu_1) & \cdots & \sin(t_2\nu_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(t_M\nu_1) & \cdots & \cos(t_M\nu_N) & \sin(t_M\nu_1) & \cdots & \sin(t_M\nu_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{LASSO} \quad \hat{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1)$$

$$\text{Group-LASSO} \quad \hat{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \right)$$

通常のLASSO と group LASSOの比較

K個の信号を仮定し、どの程度データがあれば全ての信号を検出できるか、を調べる

→結果は両者でさほど変わらず。むしろグループLASSOの性能が悪い？

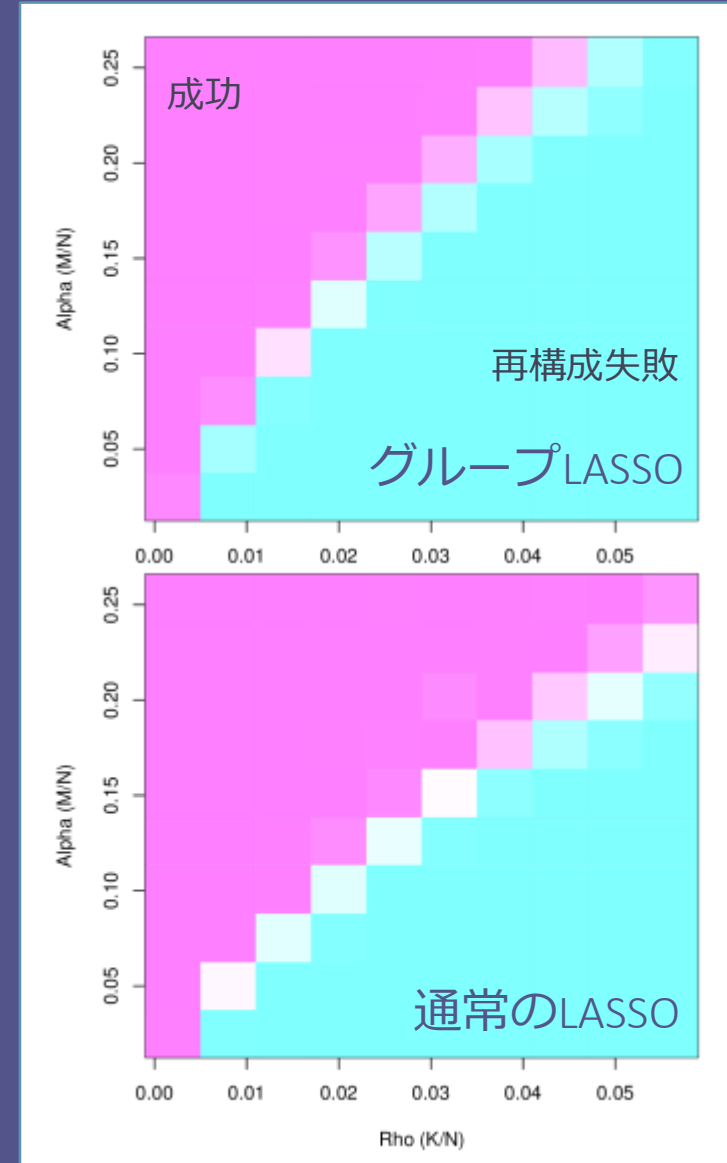
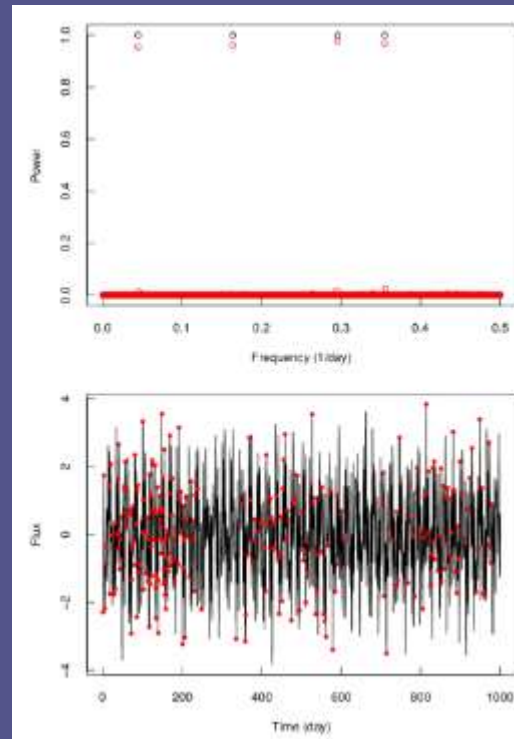
グループLASSOで得をするケースもあるはず？

周期を仮定（黒丸）

再構成（赤丸）

逆フーリエ変換で
データを生成（黒線）

データを間引いて
（赤点）



Outline

情報のスパース性を利用して解けない問題を解いてしまう
周期的な変光星のパワースペクトル推定

Kato & Uemura, 2012, PASJ, 64, 122

電波干渉計の画像再構成

Honma, Akiyama, Uemura, & Ikeda, 2014, PASJ, 66, 95

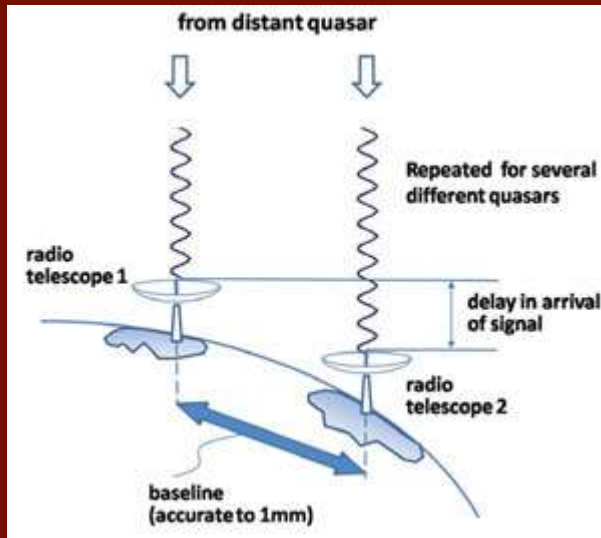
ドップラー・トモグラフィ

Uemura, Kato, Nogami, & Mennickent, 2015, PASJ, 67, 22

データから重要な説明変数を選択する
Ia型超新星の極大等級の変数選択

Uemura, Kawabata, Ikeda, Maeda, 2015, PASJ, 67, 55

電波干渉計の画像再構成



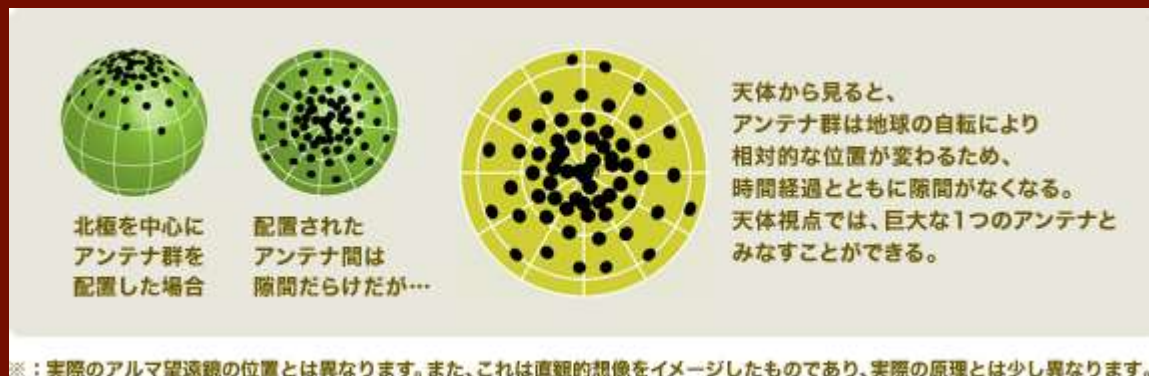
©LINZ

電波干渉系：複数の望遠鏡をつなぐことで、高い角度分解能を達成する

特に離れた観測所の望遠鏡をつなぐ干渉計
= Very Long Baseline Interferometry (VLBI)

データ = 複素ビジビリティ

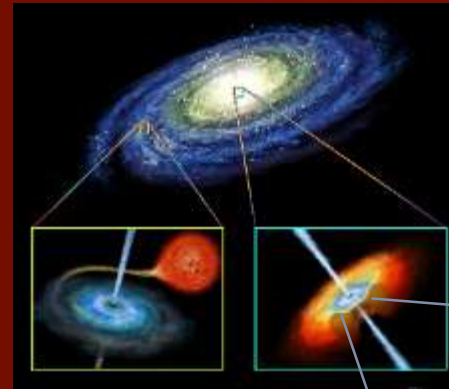
← 電波輝度分布の2Dフーリエ変換



©ALMA

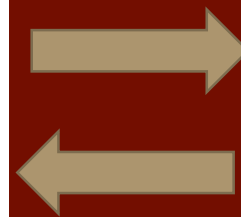
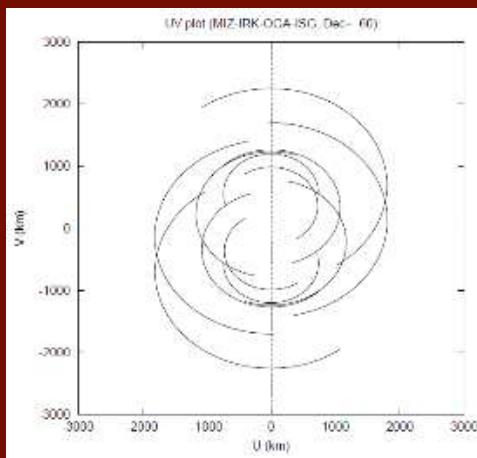
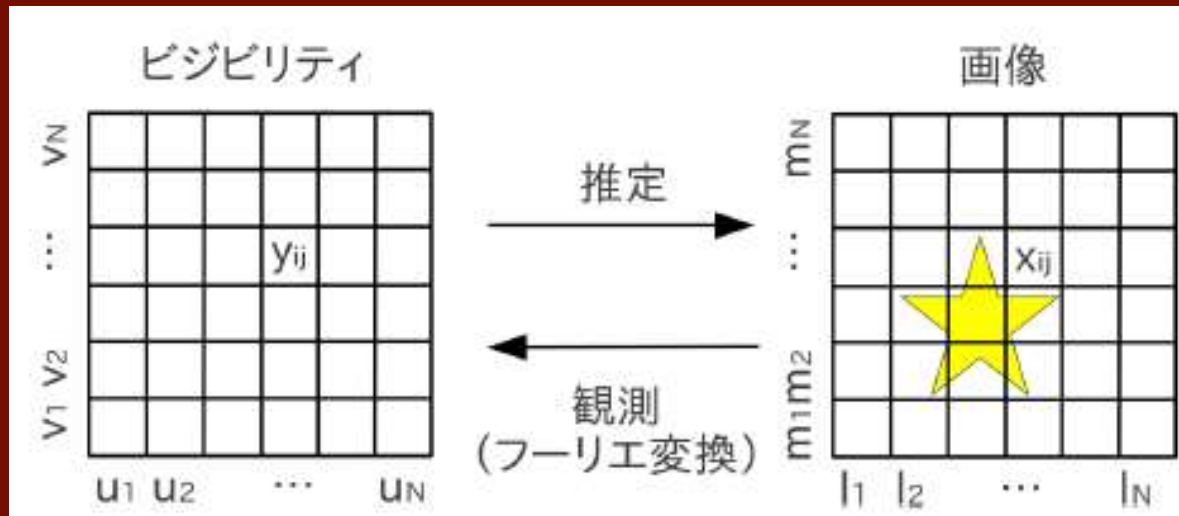
Event Horizon Telescope 計画

地球規模のVLBI → ブラックホールシャドーの検出



電波干渉計の問題

$$V(u, v) \propto \int_u \int_v I(x, y) \exp\{-2\pi i(ux + vy)\} du dv$$



EHTで観測するブラックホールシャドー

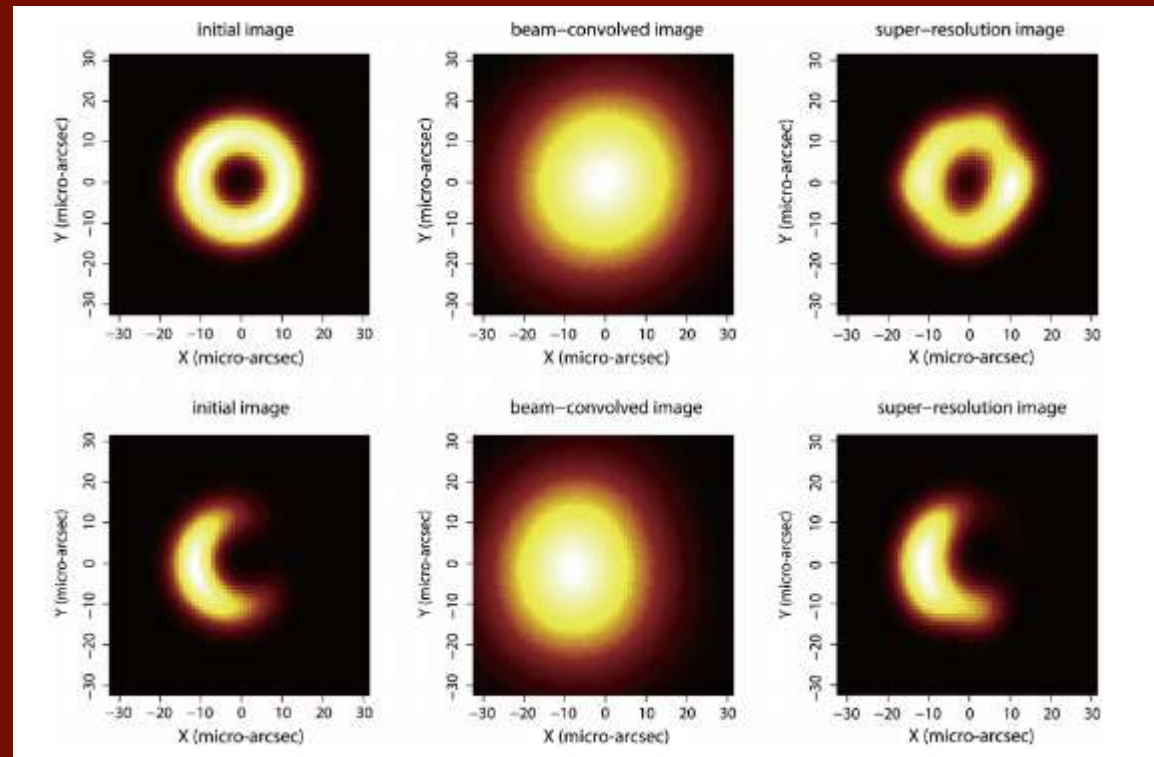
輝度分布は天球面上で
スパースとする。

LASSO → 超解像

仮定したマップ

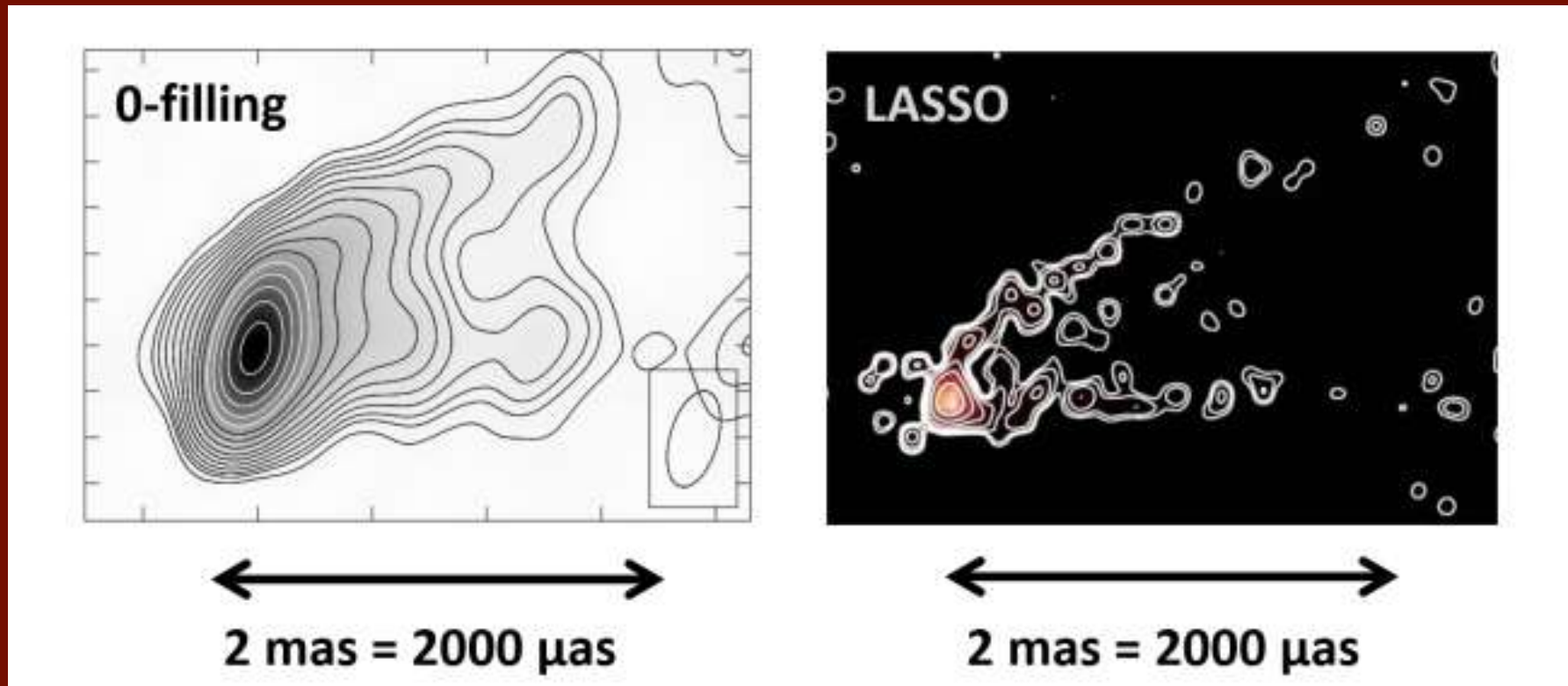
従来法

LASSO



実データ（活動銀河核 M87）への応用

Honma+15



ℓ_1 項だけでは、広がった構造に対してスパースになり過ぎる可能性。

VLBI では複素ビジビリティの位相の測定が困難。

→ 正則化項 = LASSO + Total Variation + 位相再構成 → Ikeda, et al. 2016, PASJ, 68, 45

Outline

情報のスパース性を利用して解けない問題を解いてしまう
周期的な変光星のパワースペクトル推定

Kato & Uemura, 2012, PASJ, 64, 122

電波干渉計の画像再構成

Honma, Akiyama, Uemura, & Ikeda, 2014, PASJ, 66, 95

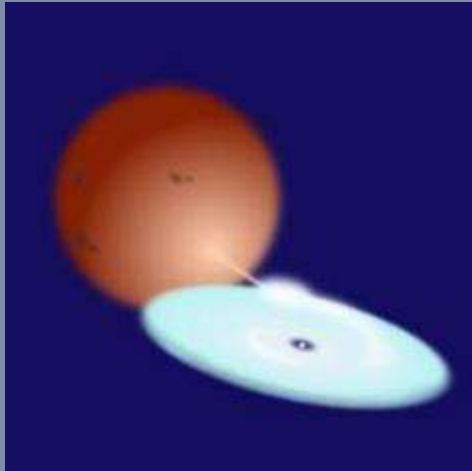
ドップラー・トモグラフィ

Uemura, Kato, Nogami, & Mennickent, 2015, PASJ, 67, 22

データから重要な説明変数を選択する
Ia型超新星の極大等級の変数選択

Uemura, Kawabata, Ikeda, Maeda, 2015, PASJ, 67, 55

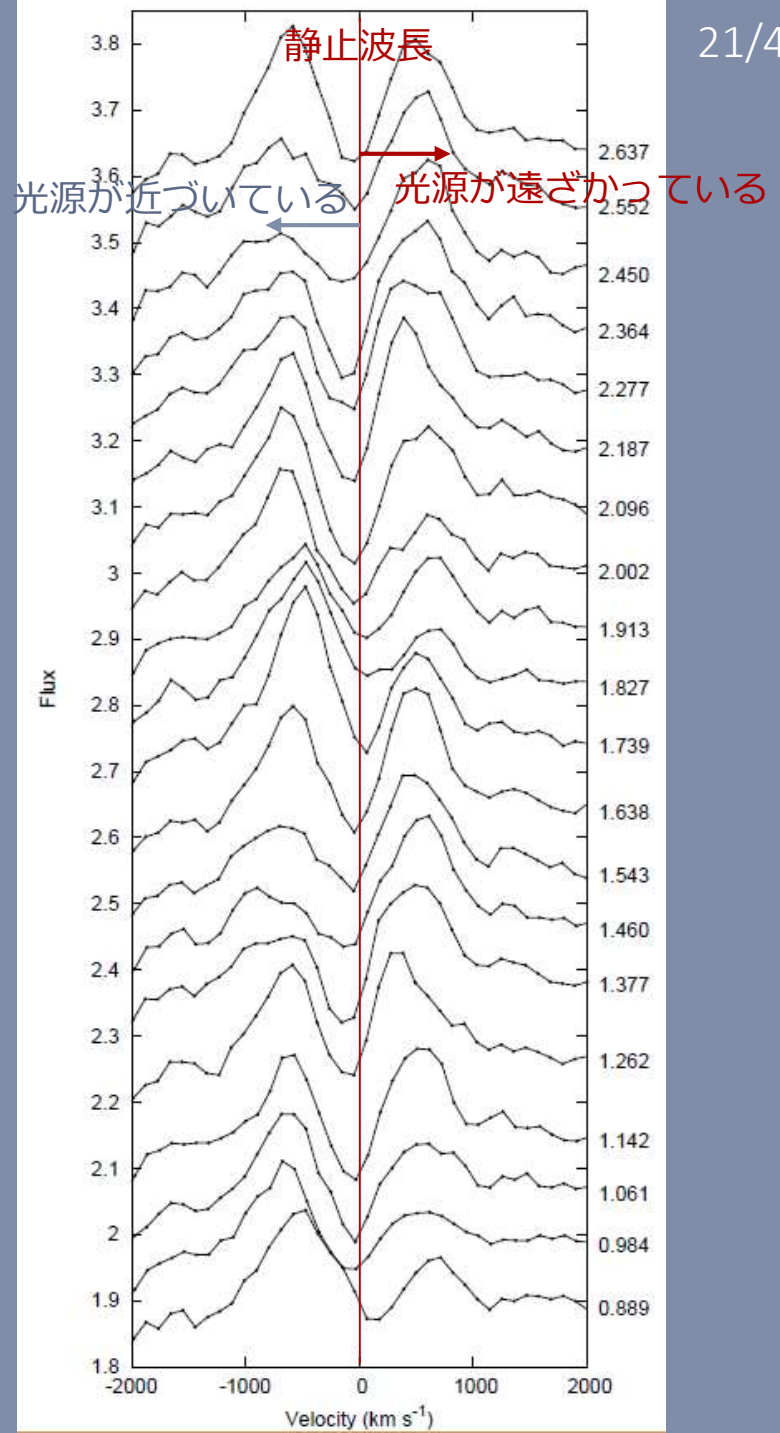
連星系降着円盤



降着円盤：核融合（恒星）と並び、宇宙の基本的なエネルギー解放機構の1つ（クエーサー、等）

降着円盤の構造を知りたい ← 角サイズが小さすぎ、直接分解して見ることは難しい

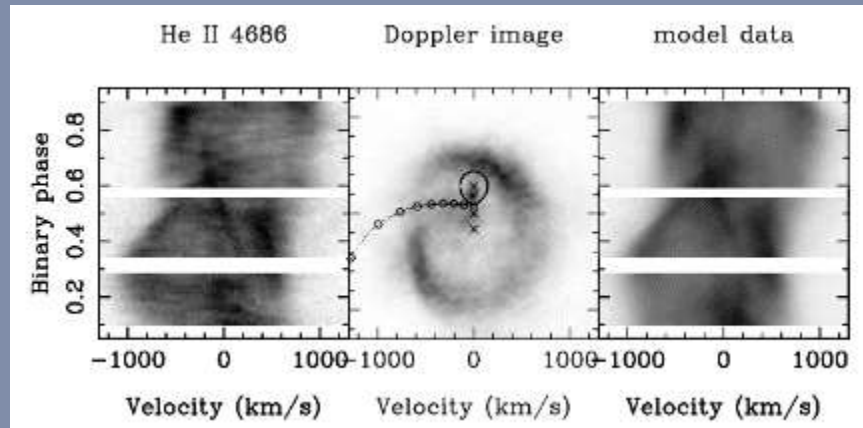
波長のドップラーシフト：光源の視線速度によって静止波長からずれる → 光源の視線速度がわかる



ドップラートモグラフィ

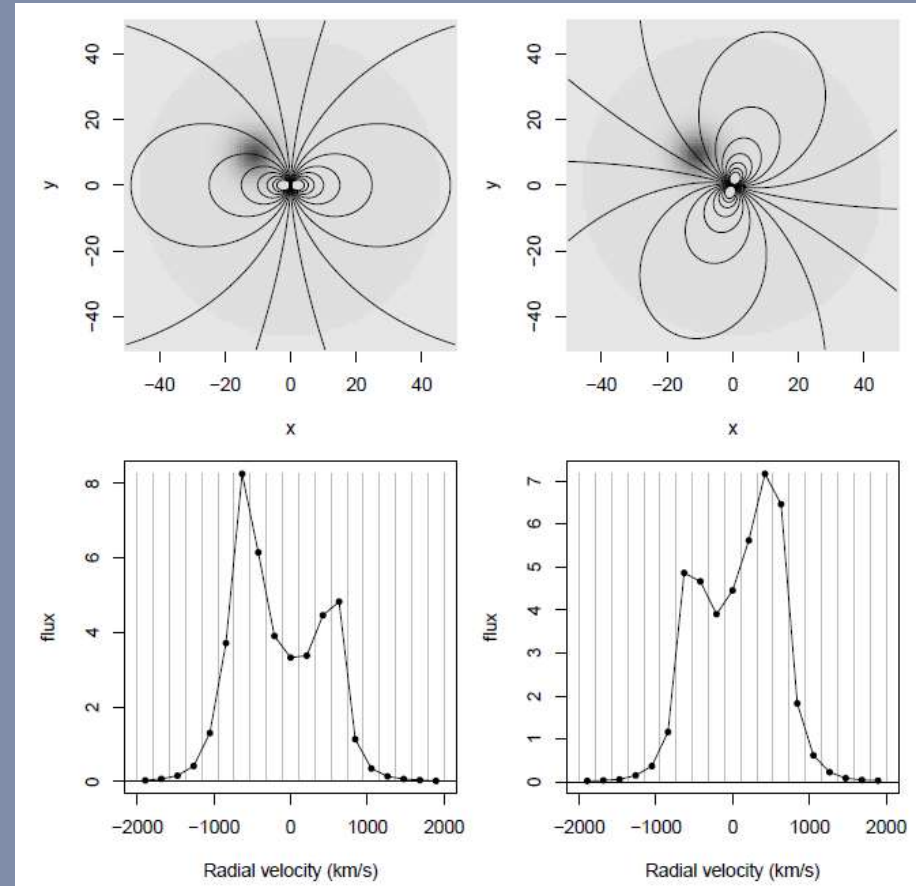
輝線スペクトルの時系列データから、
速度空間上の輝度分布を再構成

X-ray CT に似た手法



IP Peg (Harlaftis+99)

グレースケール：円盤上の輝度分布
等高線：視線速度



観測される輝線スペクトルの形状

ドップラートモグラフィの問題

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \{ \|\mathbf{d} - A\mathbf{s}\|_2^2 + \lambda\Phi \}$$

$$v_R = -v_x \cos \phi + v_y \sin \phi$$

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(v_{R,\text{obs},i} - v_{R,ij})^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$\mathbf{d}$: ある位相、ある視線速度で観測されたフラックス

$\mathbf{s}$: 2次元速度空間上の輝度マップ

A : 観測行列 (ある位相、ある視線速度での、マップ上の各ピクセルの寄与)

- 最大エントロピー法(MEM)
 - 従来法

$$S = - \sum_{i=1}^M p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

$$q_i = \frac{D_i}{\sum_{j=1}^M D_j},$$

- ドップラートモグラフィに最適か?
 - 衝撃波、等々、シャープな端をもつ構造をなまらせてしまう。

- 全変動最小化

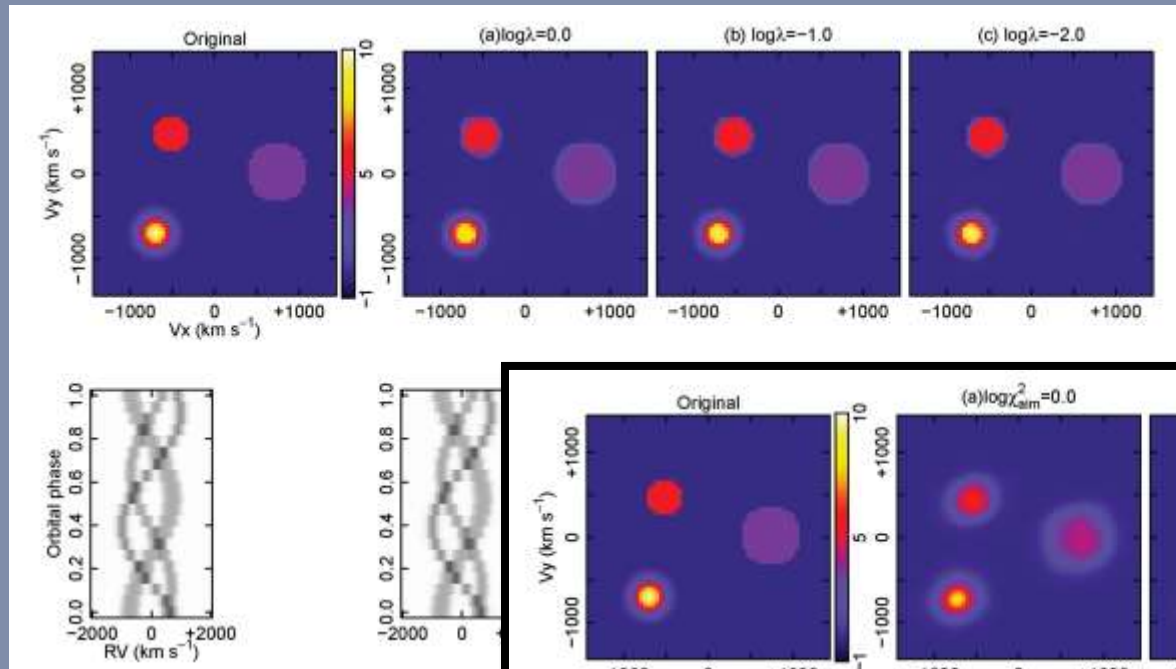
Total Variation Minimization (TVM)

$$TV(\mathbf{x}) = \sum \sqrt{(\Delta^h \mathbf{x})^2 + (\Delta^v \mathbf{x})^2}$$

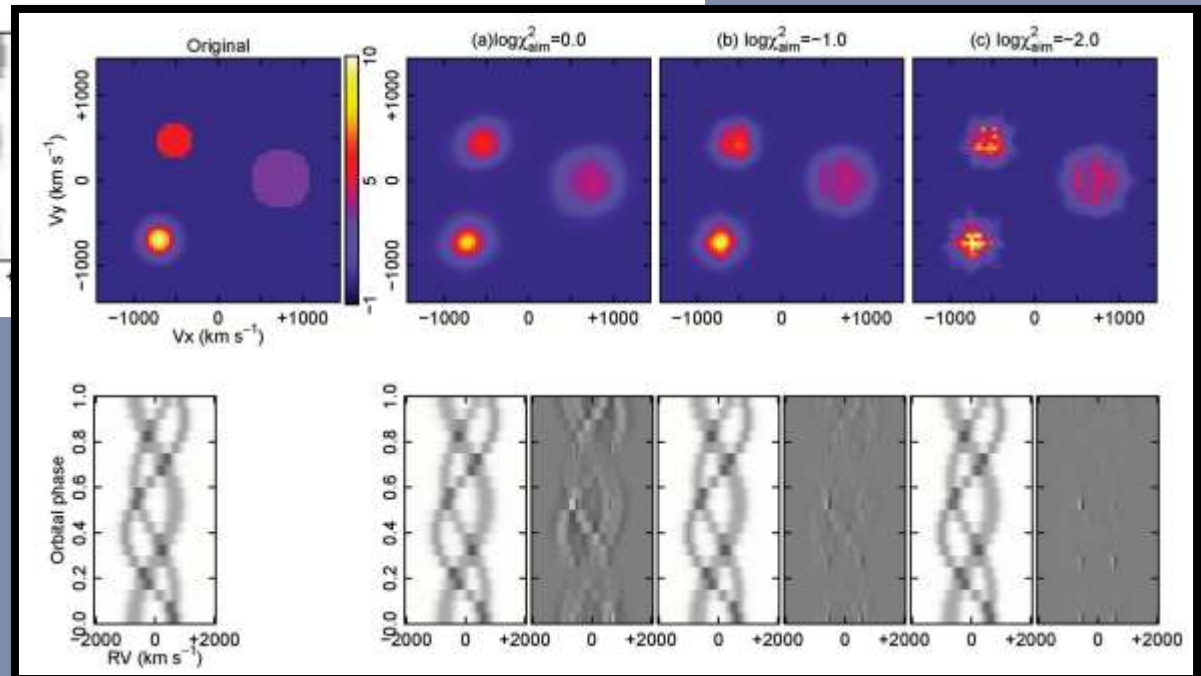
- Δx : 差分演算子 = $x_{i+1} - x_i$
- 1次微分空間でスパース
- できるだけ隣接ピクセルとの差がない画像を選択。

TVMによるドップラートモグラフィ

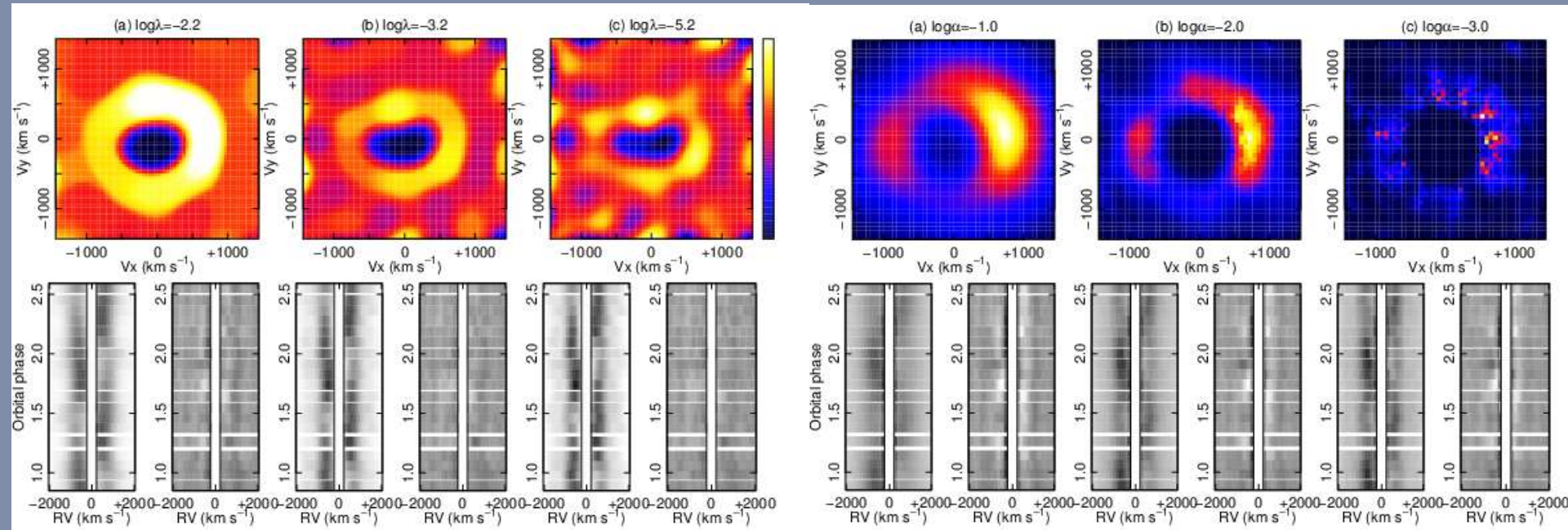
Uemura+15



鋭い端をもつ構造も、
滑らかな構造も再現



実データへの応用 (矮新星 WZ Sge)



TVM

- ✓ 全体が楕円形の降着円盤
- ✓ 伴星及び円盤の一部に局所的な光源
- ✓ モデルが観測をよく再現

MEM (Spruit+88)

- ✓ 対称的な丸い降着円盤
- ✓ 2本腕構造
- ✓ 回転する残差成分

MEMが再構成できなかった局所的な構造をTVMによって発見