3　母中央値に関する検定

仮説

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \theta = 0 \quad \text{対立仮説 } H_1 : \theta > 0$$

3.1　t–検定

仮定

$$X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta, \sigma^2) \text{ 正規分布}$$

検定統計量

$$T = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}, \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

とすると、H_0 が正しいとき、T は自由度 $n-1$ の t–分布に従う。

検定方法　H_1 が正しいとき、T は正の値をとりやすいので、

$$T \geq t_{n-1}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却}$$

とする。ただし、$t_{n-1}(\alpha)$ は自由度 $n-1$ の t–分布の上側 α 点

有意水準（危険率）
　帰無仮説 H_0 が正しいのに、誤って H_0 を棄却してしまう確率を有意水準、または、危険率と呼ぶ。H_0 が正しいとき、T は自由度 $n-1$ の t–分布に従うので、有意水準は丁度 α となる。

注　. 母集団分布が正規分布でないのに、正規分布と思って t–検定を行うと、有意水準は α に一致するとは限らない。

検出力
　対立仮説 H_1 が正しいときに、H_0 を棄却する確率。この確率が大きいほど検定方法として優れているといえる。検出力は、θ の関数であり、θ の値が大きいほど、T は大きい値をとりやすい。

両側検定

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \theta = 0 \quad \text{対立仮説 } H_2 : \theta \neq 0$$

3.2 Wilcoxon の符号付きランク検定

仮定

X_i は連続型で、

任意の $t > 0$ に対して $\Pr\{\theta - t < X_i < \theta\} = \Pr\{\theta < X_i < \theta + t\}$

検定統計量

$$T^+ = \sum_{i=1}^{n} \psi_i R_i$$

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & X_i > 0 \\ 0 & X_i < 0 \end{cases}$$

$R_i : |X_1|, \cdots, |X_n|$ を小さい順に並べたときの $|X_i|$ の順位

$V_1, \cdots, V_n$: 独立 ,

$$\Pr\{V_i = 0\} = \Pr\{V_i = i\} = \frac{1}{2} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とすると、H_0 が正しいときの T^+ の分布は、

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

の分布と一致する。

検定方法　H_1 が正しいとき、T^+ は大きな値をとりやすいので、

$$T^+ \geq w_n(\alpha) \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却}$$

とする。$w_n(\alpha)$ は、有意水準が α 以下ととなるような最大の整数値として W_n の確率関数を利用して求める。

注　. X_i の分布が、母中央値に関して対称でないとき、有意水準は α に一致するとは限らない。

確率関数の導出例

$n = 4$ の場合

(V_1, V_2, V_3, V_4) の取りうる値は，$2^4 = 16$ 通りで，それぞれ，$\frac{1}{16}$ の確率。W_4 の値を計算すると

(V_1, V_2, V_3, V_4)	W_4
$(0,0,0,0)$	0
$(1,0,0,0)$	1
$(0,2,0,0)$	2
$(1,2,0,0)$	3
$(0,0,3,0)$	3
$(1,0,3,0)$	4
$(0,2,3,0)$	5
$(1,2,3,0)$	6

(V_1, V_2, V_3, V_4)	W_4
$(0,0,0,4)$	4
$(1,0,0,4)$	5
$(0,2,0,4)$	6
$(1,2,0,4)$	7
$(0,0,3,4)$	7
$(1,0,3,4)$	8
$(0,2,3,4)$	9
$(1,2,3,4)$	10

表より，W_4 のとる値と，その確率は

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Pr\{W_4 = w\}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\alpha = 0.1$ の場合

$$\Pr\{W_4 \geq 10\} = \frac{1}{16} = 0.0625$$
$$\Pr\{W_4 \geq 9\} = \frac{1}{8} = 0.125 \quad \Rightarrow \quad w_4(0.1) = 10$$

3.3 Tukey の符号検定

仮定

$$X_i \text{ は連続型}$$

検定統計量

$$B = \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$
$$\psi_i = \begin{cases} 1 & X_i > 0 \\ 0 & X_i < 0 \end{cases}$$

H_0 が正しいとき B は二項分布 $B(n, \frac{1}{2})$ に従う。

検定方法　H_1 が正しいとき、B は大きな値をとりやすいので、

$$B \geq b(\alpha) \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却}$$

とする。ただし、$b(\alpha)$ は，有意水準が α 以下ととなるような最大の整数値として二項分布を利用して求める。

$$\Pr\{B = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$