線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 19 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 (幾何) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルの一意性，すなわち，ベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ を満たすとき，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ であることを，ベクトルの和に関する次の基本的な性質 (1), (2) のみを用いて示せ.

(1) (結合法則) $\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b}, \forall \boldsymbol{c}, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2) (ゼロベクトル) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

(ヒント: $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\cdots=\boldsymbol{c}$ の「$\cdots$」を埋めればよい．)

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 26 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．任意の x, y, z に対して，$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2x \\ y - z \\ x + y \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ．

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 10 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 次を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 17 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. $CA = B$ となる行列 C を求めよ.

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 24 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ とする.

A^{-1} を P, Q, R の積として表わせ. (ヒント:$PQRA = E$ とはならない.)

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 31 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする. $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 6 月 7 日実施

学籍番号　　　　　　　　　氏名

問題 掃き出し法を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

ただし, どのような基本変形を用いたか, 説明を入れること.

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 6 月 21 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 置換$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$について以下に答えよ.

(1) σ の逆転数を調べよ.

(2) σ を 互換 の積として表わせ.

(3) σ の符号を答えよ.

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 6 月 28 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & a-1 \\ 1 & 3+b & 4+2b \\ a-1 & 4+2b & 9-a+4b \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\mathrm{rank}(A) = 1$ となるための, a, b に関する必要十分条件を求めよ.

(2) $\mathrm{rank}(A) = 2$ となるための, a, b に関する必要十分条件を求めよ.

(3) A が正則であるための, a, b に関する必要十分条件を求めよ.

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 7 月 12 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題　(1) S_3 の元で, $\sigma(3) = 2$ となる置換 σ を全て挙げ, それぞれの符号を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を計算せよ.

線形代数演習 **I** 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 7 月 19 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\det A$ を x, y の式で表わせ.

(2) $\det A = 0$ は xy 平面上の直線を表す. この直線は 点 $(1, 2)$ と点 $(-1, 0)$ を通ることを示せ.

線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 7 月 26 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする. 第 2 行で展開して, 行列式を計算せよ。

線形代数学演習 I

若木 宏文

平成 29 年 4 月 12 日配布

1. 次の（あいまいな）命題は数学の命題として 2 通りの解釈を持つ．2 通りの解釈を説明し，それぞれの真偽を答えよ．

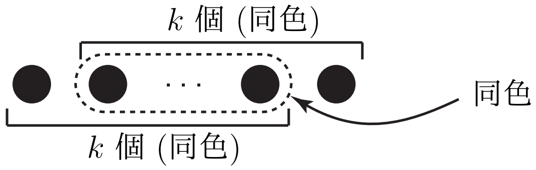
   「$a < b$ を満たす任意の 2 つの実数 a, b に対し $a < q < b$ を満たす有理数 q が存在する.」

2. 命題「地球上の碁石はすべて同色である.」に対する次の「証明」のどこに問題があるか述べよ．

   (証明) 地球上の碁石の数は自然数であるので，自然数 n を与えるごとに決まる命題「n 個の碁石からなる集合が与えられたとき，その集合内の碁石はすべて同色である」が任意の自然数 n に対して成立するを示せばよい．n に関する数学的帰納法で証明する．

   $n = 1$ のとき碁石は 1 個しかないので，明らかに（すべて）同色である．

   $n = k$ $(k \geqslant 1)$ のとき命題が成立すると仮定して，$n = k + 1$ のときに命題を示す．$k + 1$ 個の碁石からなる集合 S が与えられたとき，S から碁石を 1 個除くと，k 個の碁石からなる集合 A が得られる．帰納法の仮定から A に含まれる碁石の色はすべて同色である．S から別の碁石を 1 個の除いて得られる碁石の集合を B とすると，同じく帰納法の仮定から B に含まれる碁石はすべて同色である．

   $A \cap B$ に含まれる碁石は同色であるから，S に含まれる碁石はすべて同色である．

   以上により，命題が証明された．

3. 写像 $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}, h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$ で定める．

   (1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を示せ．

   (2) $f \circ g = g \circ f$, $f \circ h = h \circ f$ がそれぞれ成り立つか述べよ．

4. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次が成り立つこと図を用いて説明せよ.

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

5. ベクトルの差 $-$ に関して，結合法則，交換法則が成り立つか述べよ.

6. 平面上の異なる 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき，線分 PQ の中点の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ であることを示せ.

7. 平面上の互いに異なる 3 点 P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，$QR, RP, PQ$ の長さをそれぞれ a, b, c とする.

(1) 三角形 PQR の重心の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$ であることを示せ.

(2) 三角形 PQR の内心の位置ベクトルは $\dfrac{a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}}{a+b+c}$ であることを示せ.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 19 日配布

8. 次の等式の内, 正しいものを選べ.

(1) $2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

(1) $2\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} y \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -2x \end{pmatrix}$

10. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

12. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. 次の等式が成り立つような数 x, y, z, w の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} x+1 & y-z \\ 2 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x-y & 1-y \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x+1, & y-z, & 2, & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & x-y, & 1-y \end{pmatrix}$

14. (1) 任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

(2) c を複素数とする. 任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

15. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする.

(1) 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

(2) c を複素数とする. 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ cz \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

(3) 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ を求めよ.

17. 2×3 行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とし, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とするとき $A\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ となることを示せ.

18. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし, 2×2 行列 A は $A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする.

(1) A を求めよ.

(2) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ を満たす x, y は, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{c}$ を満たすことを示せ.

19. A を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を n 次元ベクトル, c と d を複素数とするとき, $A(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}) = c(A\boldsymbol{x}) + d(A\boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 26 日配布

行列に関する用語の定義

- 行の数と列の数が等しい行列を**正方行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ 行列を n 次正方行列と呼ぶ.
- 正方行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} とする. $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ であるような行列を, **上三角行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ の上三角行列を n 次上三角行列と呼ぶ.
- 正方行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} とするとき, $i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ であるような行列を, **下三角行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ の下三角行列を n 次下三角行列と呼ぶ.
- 行列 $m \times n$ 行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} とする. $n \times m$ 行列 B の (i,j) 成分を b_{ij} とするとき, $b_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ を満たすならば B は A の**転置行列**であるといい, $B = {}^tA$ と書く.
- ${}^tA = A$ を満たす行列 A を **対称行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ の対称行列を n 次対称行列と呼ぶ.

20. a, b を複素数, C を $p \times q$ 行列, D と E を $q \times r$ 行列とする. 両辺の (i,j) 成分 $(i = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, r)$ を比較することによって $C(aD + bE) = a(CD) + b(CE)$ が成り立つことを示せ.

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. $ABA = A$ を満たす行列 B を求めよ.

22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = (-1, 1, 1)$ とする. $ABA = A$ かつ $\boldsymbol{c}B = (0, 0)$ を満たす行列 B を求めよ.

23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. $ABA = A$ かつ $B\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B を求めよ.

24. A を $m \times n$ 行列とするとき, $({}^tA)A$, $A({}^tA)$ はいずれも対称行列であることを示せ.

25. 次の命題が真ならば証明し, 偽ならば反例を挙げよ.

    (1) A, B がともに n 次上三角行列ならば, AB も上三角行列である.

    (2) A, B がともに n 次対称行列ならば, AB も対称行列である.

26. 次の命題が真ならば証明し, 偽ならば反例を挙げよ.

    (1) n 次正方行列 A が $AA = O_{n,n}$ を満たすならば, $A = O_{n,n}$ である.

    (2) n 次正方行列 A が $({}^tA)A = O_{n,n}$ を満たすならば, $A = O_{n,n}$ である.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 10 日配布

27. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$AX = XA$ であるための必要十分条件は，ある実数 s, t が存在して $X = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ と書けることである．これを証明せよ．

    (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．$AX = XA$ であるための必要十分条件は，ある実数 s, t が存在して $X = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ と書けることをである．これを証明せよ．

    (3) 2 次正方行列 X がどんな 2 次正方行列 Y に対しても $XY = YX$ を満たすための必要十分条件は，ある実数 s が存在して $X = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と書けることである．これを証明せよ．

28. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

    (1) $AB = E_2$ となる B が存在するための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを証明せよ.

    (2) $BA = E_2$ となる B が存在するための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを証明せよ.

    (3) $AB = E_2, CA = E_2$ となる B, C が存在すれば $B = C$ であることを示せ.

    (4) $AB = E_2$ をみたす行列 B が存在すれば, A は正則であることを示せ.

29. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix}$ とする.

    A が正則であるための必要十分条件は, $b(ae - c) \neq 0$ であることを証明せよ.

31. $AB = E_3$ となる B が存在することと, $CA = E_3$ となる C が存在することは同値であることを証明せよ.

32. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ とする.

    (1) A が正則であるための必要十分条件は $adf \neq 0$ であることを証明せよ.

    (2) $A^3 = O_3$ であるための必要十分条件は $a = d = f = 0$ であることを証明せよ.
    (正方行列 A に対して, A の n 個の積を A^n と表し. A の n 乗とよぶ.)

33. $n+1$ 次上三角行列 A を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \mathbf{0}_n & A_{22} \end{pmatrix}$ と分割する．ただし, a_{11} はスカラー, $\boldsymbol{a}_{12}$ は $1 \times n$ 行列 (n 次行ベクトル), $\mathbf{0}_n$ は $n \times 1$ 零行列 (n 次列零ベクトル), A_{22} は n 次上三角 行列である．A が正則であるための必要十分条件は $a_{11}A_{22}$ が正則であることを証明せよ．

34. n 次上三角行列が正則であるための必要十分条件は, すべての対角成分が 0 でないことである．これを n に関する帰納法を用いて示せ．

35. $A = \begin{pmatrix} E_n & B \\ B & E_n \end{pmatrix}$ とする．ただし, B は n 次正方行列である．このとき, A が正則であるための必要十分条件は, $E_n - B^2$ が正則であることである．これを証明せよ．

36. A を正則行列とする．

(1) ${}^tA = A$ ならば, ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$ であることを示せ．

(2) ${}^tA = -A$ ならば, ${}^t(A^{-1}) = -A^{-1}$ であることを示せ．

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 17 日配布

37. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, x を変数とする多項式 $f_A(x)$ を $f_A(x) := x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ と定める.

    (1) $f_A(A) = O$ であることを示せ.

    (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. x^4 を $f_A(x)$ で割った余りを計算することにより, A^4 を計算せよ.

    (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. A^{20} を計算せよ.

38. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対して 4×4 行列 $\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$ を $A \otimes B$ と表す. (クロネッカー積と呼ぶ.)

    (1) A, B が共に正則ならば, $A \otimes B$ は正則であることを示せ.

    (2) $A \otimes B$ が正則ならば, A, B は共に正則であることを示せ.

39. 上三角行列が正則ならば, 逆行列も上三角行列であることを証明せよ.

40. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

    (1) $B^{-1}AB$ を計算せよ.

    (2) n を自然数とする. A^n の各成分を n を用いて表せ.

41. 正方行列 A が正則ならば, その転置行列 ${}^tA$ も正則であることを示せ.

42. 「$AX = E_n$ となる X が存在すれば A は正則である」ことと, **??** を用いて,
「$YA = E_n$ となる Y が存在すれば A は正則である」ことを示せ.

43. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

44. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は n 次列ベクトルで, ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \neq 1$ とする. $(E_n - \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b})^{-1} = (E_n + k\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b})$ であるとき, k を ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 24 日配布

45. (1) どの様な $m \times n$ 行列 A に対しても $P_{ij}A$ が A の第 i 行と第 j 行を入れ替えたものになるような， m 次正方行列 P_{ij} を求めよ．ただし，$i \neq j$ とする．また，この P_{ij} の逆行列を求めよ．

    (2) どの様な $m \times n$ 行列 A に対しても $P_i(c)A$ が A の第 i 行を c 倍したものになるような，m 次正方行列 $P_i(c)$ を求めよ．ただし，$c \neq 0$ とする．また，この $P_i(c)$ の逆行列を求めよ．

    (3) どの様な $m \times n$ 行列 A に対しても $P_{ij}(c)A$ が A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えたものになるような，m 次正方行列 $P_{ij}(c)$ を求めよ．ただし，$i \neq j$, $c \neq 0$ とする．また，この $P_{ij}(c)$ の逆行列を求めよ．

46. 次の行列の階数を求めよ．また正方行列については正則かどうか述べよ．ただし，a, $b \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}$

47. $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A_1 + \mathrm{rank}A_2$ であることを示せ．

48. $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ とし, A_1 は正則行列であるとする．このとき, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A_1 + \mathrm{rank}A_3$ であることを示せ．

49. 掃き出し法を用いて次の行列の逆行列を求めよ．ただし，$a \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2a & a^2 \\ 1 & 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 31 日配布

50. 次の連立 1 次方程式が解を持つために $a, b, c \in \mathbb{R}$ が満たすべき条件を求めよ．

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = a \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = c \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = a \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = a \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = b \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = c \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + 3x_3 + 6x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3ax_4 = b + 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2b - 1 \end{cases}$

51. 掃き出し法を用いて次の連立 1 次方程式を解け．ただし，解がないときは解なしとし，解があるときは解をすべて求めよ．

(1) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 9x_4 = 24 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 13 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 41 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = -3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -7 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 8x_4 + 7x_5 = -8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 7x_5 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 10x_5 = -8 \end{cases}$

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 6 月 7 日配布

52. 次の行列の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　　(10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

53. 次の置換 σ, τ に対して, $\sigma\tau, \sigma^{-1}$ を求めよ.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

54. 次の置換を互換の積で表わせ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 6 月 21 日配布

巡回置換

置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ は, 1 を 3, 3 を 5, 5 を 1 に移し, 2 と 4 を固定する. このような置換を $(1\ 3\ 5)$ のように表し, **巡回置換**と呼ぶ. 一般に, $i_1, i_2, \dots, i_k$ を互いに異なる k 個の自然数とするとき, $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ は

$$\sigma(i_j) = i_{j+1}\ (j = 1, 2, \dots, k-1), \quad \sigma(i_k) = i_1, \quad \sigma(l) = l\ (l \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\})$$

となるような巡回置換である.

問題

55. 巡回置換 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ は, k が偶数のとき奇置換, k が奇数のとき偶置換であることを証明せよ.

56. 次の置換を巡回置換の積で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

57. 次の巡回置換の逆転数を調べよ.

(1) $(7\ 3\ 6\ 4\ 2)$　　(2) $(4\ 3\ 2\ 6\ 1)$

(3) $(2\ 5\ 1\ 6\ 7)$　　(4) $(2\ 1\ 7\ 6\ 3)$

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 7 月 5 日配布

58. $\tau \in S_n$ とし, S_n から S_n への写像 f_τ を $f_\tau(\sigma) = \tau\sigma$ と定める.

    (1) f_τ は全単射であることを証明せよ.

    (2) S_n の偶置換の個数と奇置換の個数は等しいことを証明せよ.

59. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を n 次正方行列とし, $\tau \in S_n$ とする.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

であるとき, $\det B = \mathrm{sgn}(\tau) \det A$ であることを示せ.

60. $n \geq 2, A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列とする $B = (\boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3\, \cdots \boldsymbol{a}_n\, \boldsymbol{a}_1)$ であるとき, n が偶数なら $\det B = -\det A$ であることを示せ.

61. $n \geq 3, A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列とする $B = (\boldsymbol{a}_3\, \boldsymbol{a}_4\, \cdots \boldsymbol{a}_n\, \boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2)$ であるとき, $\det A = \det B$ であることを示せ.

62. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算せよ.

63. 次の行列の行列式を計算せよ.

    (1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

    (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

    (3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

    (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

64. A, B を n 次正方行列とする.

$\det \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^n \det A \det B$ であることを示せ.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 7 月 26 日配布

65. a を複素数とし, 次の行列のの階数を $f(a)$ と表す．このとき, $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ．また, $f(a)$ が最小値をとるときの a の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & a & -2 \\ a & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

66. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とし, B を 4×4 行列とする．

(1) $AB = O$ であるような行列 B の階数の最大値を求めよ．

(2) 行列 AB の階数の最大値を求めよ．

67. ${}^tHH = E_n$ となるような n 次正方行列 H を n 次直交行列と呼ぶ. H の行列式は 1 または -1 であることを示せ.

68. A を n 次実正則行列とする．A^2 の行列式は 正であることを示せ.

69. $m+n$ 次正方行列 X を $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ と分割する．ただし, A は m 次正方行列である．また, A, D は正則であるとする．

(1) $Y = \begin{pmatrix} E_m & F \\ O & E_n \end{pmatrix}$ とするとき $XY = \begin{pmatrix} G & O \\ H & I \end{pmatrix}$ となるような行列 F を, A, B, C, D を用いて表わせ．ただし, G は m 次正方行列, I は n 次正方行列である.

(2) (1) を利用して, $\det(X) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$ であることを示せ.