線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 10 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 次を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 10 日配布

27. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$AX = XA$ であるための必要十分条件は，ある実数 s, t が存在して $X = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ と書けることである．これを証明せよ．

    (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．$AX = XA$ であるための必要十分条件は，ある実数 s, t が存在して $X = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ と書けることをである．これを証明せよ．

    (3) 2 次正方行列 X がどんな 2 次正方行列 Y に対しても $XY = YX$ を満たすための必要十分条件は，ある実数 s が存在して $X = s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と書けることである．これを証明せよ．

28. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

    (1) $AB = E_2$ となる B が存在するための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを証明せよ.

    (2) $BA = E_2$ となる B が存在するための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを証明せよ.

    (3) $AB = E_2, CA = E_2$ となる B, C が存在すれば $B = C$ であることを示せ.

    (4) $AB = E_2$ をみたす行列 B が存在すれば, A は正則であることを示せ.

29. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix}$ とする.

    A が正則であるための必要十分条件は, $b(ae - c) \neq 0$ であることを証明せよ.

31. $AB = E_3$ となる B が存在することと, $CA = E_3$ となる C が存在することは同値であることを証明せよ.

32. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ とする.

    (1) A が正則であるための必要十分条件は $adf \neq 0$ であることを証明せよ.

    (2) $A^3 = O_3$ であるための必要十分条件は $a = d = f = 0$ であることを証明せよ.
    (正方行列 A に対して, A の n 個の積を A^n と表し. A の n 乗とよぶ.)

33. $n+1$ 次上三角行列 A を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \mathbf{0}_n & A_{22} \end{pmatrix}$ と分割する．ただし, a_{11} はスカラー, $\boldsymbol{a}_{12}$ は $1 \times n$ 行列 (n 次行ベクトル), $\mathbf{0}_n$ は $n \times 1$ 零行列 (n 次列零ベクトル), A_{22} は n 次上三角 行列である．A が正則であるための必要十分条件は $a_{11}A_{22}$ が正則であることを証明せよ.

34. n 次上三角行列が正則であるための必要十分条件は, すべての対角成分が 0 でないことである．これを n に関する帰納法を用いて示せ.

35. $A = \begin{pmatrix} E_n & B \\ B & E_n \end{pmatrix}$ とする．ただし, B は n 次正方行列である．このとき, A が正則であるための必要十分条件は, $E_n - B^2$ が正則であることである．これを証明せよ.

36. A を正則行列とする.

(1) ${}^tA = A$ ならば, ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$ であることを示せ.

(2) ${}^tA = -A$ ならば, ${}^t(A^{-1}) = -A^{-1}$ であることを示せ.