線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 17 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. $CA = B$ となる行列 C を求めよ.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 17 日配布

37. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, x を変数とする多項式 $f_A(x)$ を $f_A(x):=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ と定める.

(1) $f_A(A)=O$ であることを示せ.

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. x^4 を $f_A(x)$ で割った余りを計算することにより, A^4 を計算せよ.

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. A^{20} を計算せよ.

38. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対して 4×4 行列 $\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$ を $A\otimes B$ と表す. (クロネッカー積と呼ぶ.)

(1) A, B が共に正則ならば, $A\otimes B$ は正則であることを示せ.

(2) $A\otimes B$ が正則ならば, A, B は共に正則であることを示せ.

39. 上三角行列が正則ならば, 逆行列も上三角行列であることを証明せよ.

40. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $B^{-1}AB$ を計算せよ.

(2) n を自然数とする. A^n の各成分を n を用いて表せ.

41. 正方行列 A が正則ならば, その転置行列 ${}^tA$ も正則であることを示せ.

42. 「$AX=E_n$ となる X が存在すれば A は正則である」ことと, 41 を用いて, 「$YA=E_n$ となる Y が存在すれば A は正則である」ことを示せ.

43. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

44. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は n 次列ベクトルで, ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\neq 1$ とする. $(E_n-\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b})^{-1}=(E_n+k\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b})$ であるとき, k を ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.