線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 24 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ とする.

A^{-1} を P, Q, R の積として表わせ. (ヒント:$PQRA = E$ とはならない.)

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 5 月 24 日配布

45. (1) どの様な $m \times n$ 行列 A に対しても $P_{ij}A$ が A の第 i 行と第 j 行を入れ替えたものになるような，m 次正方行列 P_{ij} を求めよ．ただし，$i \neq j$ とする．また，この P_{ij} の逆行列を求めよ．

    (2) どの様な $m \times n$ 行列 A に対しても $P_i(c)A$ が A の第 i 行を c 倍したものになるような，m 次正方行列 $P_i(c)$ を求めよ．ただし，$c \neq 0$ とする．また，この $P_i(c)$ の逆行列を求めよ．

    (3) どの様な $m \times n$ 行列 A に対しても $P_{ij}(c)A$ が A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えたものになるような，m 次正方行列 $P_{ij}(c)$ を求めよ．ただし，$i \neq j, c \neq 0$ とする．また，この $P_{ij}(c)$ の逆行列を求めよ．

46. 次の行列の階数を求めよ．また正方行列については正則かどうか述べよ．ただし，$a, b \in \mathbb{R}$ とする．

    (1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

    (4) $\begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}$

47. $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A_1 + \mathrm{rank}A_2$ であることを示せ．

48. $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ とし, A_1 は正則行列であるとする．このとき, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A_1 + \mathrm{rank}A_3$ であることを示せ．

49. 掃き出し放を用いて次の行列の逆行列を求めよ．ただし，$a \in \mathbb{R}$ とする．

    (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2a & a^2 \\ 1 & 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$