線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 7 月 5 日配布

58. $\tau \in S_n$ とし, S_n から S_n への写像 f_τ を $f_\tau(\sigma) = \tau\sigma$ と定める.

    (1) f_τ は全単射であることを証明せよ.

    (2) S_n の偶置換の個数と奇置換の個数は等しいことを証明せよ.

59. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を n 次正方行列とし, $\tau \in S_n$ とする.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

であるとき, $\det B = \mathrm{sgn}(\tau) \det A$ であることを示せ.

60. $n \geq 2, A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列とする $B = (\boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3\, \cdots \boldsymbol{a}_n\, \boldsymbol{a}_1)$ であるとき, n が偶数なら $\det B = -\det A$ であることを示せ.

61. $n \geq 3, A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列とする $B = (\boldsymbol{a}_3\, \boldsymbol{a}_4\, \cdots \boldsymbol{a}_n\, \boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2)$ であるとき, $\det A = \det B$ であることを示せ.

62. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算せよ.

63. 次の行列の行列式を計算せよ.

    (1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

    (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

    (3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

    (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

64. A, B を n 次正方行列とする.

$\det \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^n \det A \det B$ であることを示せ.