線形代数学演習 I

若木 宏文

平成 29 年 4 月 12 日配布

はじめに

本授業では，線形代数学演習 I の講義内容である「ベクトル, 行列, 連立 1 次方程式, 線形写像, 行列式」についての演習を行う．

演習で扱う内容は，可能な限り授業内容に沿うつもりであるが，十分な理解ができていないと感じたときには，必要に応じて一つの話題に多くの時間を費やす可能性もある．

演習時間はおおむね次のように進めていく．

- 毎回小テストを実施し，その後黒板発表用問題を配布する．
- 小テストは，原則として 1 回前の演習問題の内容に関して最低限これだけは押さえて欲しいという問題を出題する．配布後 20 分ほど経過した段階で回収する．速やかに仕上げるのが望ましい．提出された解答用紙で出欠を確認するので，<u>未完成であっても必ず提出すること</u>．また，解答用紙には必ず <u>氏名・学籍番号を記入すること</u>.
- 黒板発表用問題は，より理解を深めてもらうための問題である．自分で手を動かし，積極的に取り組んでほしい．解いた問題は希望者に発表してもらう．<u>学期中に一人最低一回は発表すること</u>. なお，発表の際には自分がわかっているということを伝えるだけではなく，聴いている人がよく分かるように心掛けること.
- 黒板で発表する問題は，その授業以前に配布されたプリントの問題でももちろん構わない.
- 配布プリントは

  http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/LinearExI17/index.shtml

  にアップする.

講義の内容をよく理解するために，積極的に演習を活用してほしい.

線形代数演習 I 小テスト (アンケート)

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 12 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　　氏名

課題 (1) これまでに勉強してきて面白いと思ったこと，広島大学理学部数学科でこれから学んでいきたいことについて，自己紹介をかねて自由に述べよ．

(2) 線形代数学ではどの様なことを学ぶのか想像し，自由に述べよ（知っていることがなければ，なしでも良い．間違っていてもよい）．

線形代数学演習 I

若木 宏文

平成 29 年 4 月 12 日配布

1　導入, 幾何ベクトル

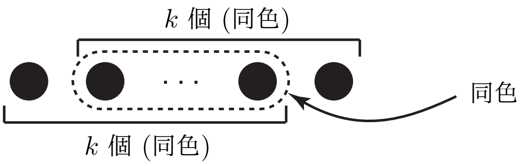
黒板発表用問題

1. 次の（あいまいな）命題は数学の命題として 2 通りの解釈を持つ．2 通りの解釈を説明し，それぞれの真偽を答えよ．

   「$a < b$ を満たす任意の 2 つの実数 a, b に対し $a < q < b$ を満たす有理数 q が存在する．」

2. 命題「地球上の碁石はすべて同色である．」に対する次の「証明」のどこに問題があるか述べよ．

   (証明) 地球上の碁石の数は自然数であるので，自然数 n を与えるごとに決まる命題「n 個の碁石からなる集合が与えられたとき，その集合内の碁石はすべて同色である」が任意の自然数 n に対して成立するを示せばよい．n に関する数学的帰納法で証明する．
   $n = 1$ のとき碁石は 1 個しかないので，明らかに（すべて）同色である．
   $n = k$ $(k \geqslant 1)$ のとき命題が成立すると仮定して，$n = k + 1$ のときに命題を示す．$k + 1$ 個の碁石からなる集合 S が与えられたとき，S から碁石を 1 個除くと，k 個の碁石からなる集合 A が得られる．帰納法の仮定から A に含まれる碁石の色はすべて同色である．S から別の碁石を 1 個の除いて得られる碁石の集合を B とすると，同じく帰納法の仮定から B に含まれる碁石はすべて同色である．

   $A \cap B$ に含まれる碁石は同色であるから，S に含まれる碁石はすべて同色である．
   以上により，命題が証明された．

3. 写像 $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$, $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$ で定める．

   (1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を示せ．

   (2) $f \circ g = g \circ f$, $f \circ h = h \circ f$ がそれぞれ成り立つか述べよ．

4. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次が成り立つこと図を用いて説明せよ．

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

5. ベクトルの差 $-$ に関して，結合法則，交換法則が成り立つか述べよ．

6. 平面上の異なる 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき，線分 PQ の中点の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ であることを示せ．

7. 平面上の互いに異なる 3 点 P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, QR, RP, PQ の長さをそれぞれ a, b, c とする．

(1) 三角形 PQR の重心の位置ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$ であることを示せ．

(2) 三角形 PQR の内心の位置ベクトルは $\dfrac{a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}}{a+b+c}$ であることを示せ．