線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 19 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 (幾何) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルの一意性，すなわち，ベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ を満たすとき，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ であることを，ベクトルの和に関する次の基本的な性質 (1), (2) のみを用いて示せ.

(1) (結合法則) $\forall\boldsymbol{a}, \forall\boldsymbol{b}, \forall\boldsymbol{c}, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2) (ゼロベクトル) $\forall\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

(ヒント: $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\cdots=\boldsymbol{c}$ の「$\cdots$」を埋めればよい．)

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 19 日配布

8. 次の等式の内, 正しいものを選べ.

(1) $2\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\9\\-5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\10\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\\2\end{pmatrix}$

9. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

(1) $2\begin{pmatrix}x\\y\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}x\\y\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}y\\1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\z\\-2x\end{pmatrix}$

10. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}-z\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

11. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

12. 次の等式が成り立つような数 x, y, z の値を求めよ.

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

13. 次の等式が成り立つような数 x, y, z, w の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix}x+1 & y-z\\2 & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\x-y & 1-y\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}x+1, & y-z, & 2, & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2, & 0, & x-y, & 1-y\end{pmatrix}$

14. (1) 任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

(2) c を複素数とする. 任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

15. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする.

(1) 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

(2) c を複素数とする. 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ cz \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

(3) 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ を求めよ.

17. 2×3 行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とし, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とするとき $A\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ となることを示せ.

18. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし, 2×2 行列 A は $A\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする.

(1) A を求めよ.

(2) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ を満たす x, y は, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{c}$ を満たすことを示せ.

19. A を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を n 次元ベクトル, c と d を複素数とするとき, $A(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}) = c(A\boldsymbol{x}) + d(A\boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ.