線形代数演習 I 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 26 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする. 任意の x, y, z に対して, $A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2x \\ y - z \\ x + y \end{pmatrix}$ となるような 3×3 行列 A を求めよ.

線形代数演習 I

担当：若木 宏文

平成 29 年 4 月 26 日配布

行列に関する用語の定義

- 行の数と列の数が等しい行列を**正方行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ 行列を n 次正方行列と呼ぶ.
- 正方行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とする. $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ であるような行列を, **上三角行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ の上三角行列を n 次上三角行列と呼ぶ.
- 正方行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とするとき, $i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ であるような行列を, **下三角行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ の下三角行列を n 次下三角行列と呼ぶ.
- 行列 $m \times n$ 行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とする. $n \times m$ 行列 B の (i, j) 成分を b_{ij} とするとき, $b_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ を満たすならば B は A の**転置行列**であるといい, $B = {}^tA$ と書く.
- ${}^tA = A$ を満たす行列 A を **対称行列**と呼ぶ. また, $n \times n$ の対称行列を n 次対称行列と呼ぶ.

20. a, b を複素数, C を $p \times q$ 行列, D と E を $q \times r$ 行列とする. 両辺の (i, j) 成分 $(i = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, r)$ を比較することによって $C(aD + bE) = a(CD) + b(CE)$ が成り立つことを示せ.

21. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. $ABA = A$ を満たす行列 B を求めよ.

22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = (-1, 1, 1)$ とする. $ABA = A$ かつ $\boldsymbol{c}B = (0, 0)$ を満たす行列 B を求めよ.

23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. $ABA = A$ かつ $B\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B を求めよ.

24. A を $m \times n$ 行列とするとき, $({}^tA)A$, $A({}^tA)$ はいずれも対称行列であることを示せ.

25. 次の命題が真ならば証明し, 偽ならば反例を挙げよ.
    (1) A, B がともに n 次上三角行列ならば, AB も上三角行列である.
    (2) A, B がともに n 次対称行列ならば, AB も対称行列である.

26. 次の命題が真ならば証明し, 偽ならば反例を挙げよ.
    (1) n 次正方行列 A が $AA = O_{n,n}$ を満たすならば, $A = O_{n,n}$ である.
    (2) n 次正方行列 A が $({}^tA)A = O_{n,n}$ を満たすならば, $A = O_{n,n}$ である.