線形代数演習 II 中間試験

平成 29 年 12 月 7 日

問題 1. 次のベクトルの集合が一次独立かどうか調べよ.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問題 2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 次元実ベクトルで, いずれも零ベクトルでないとする. 任意の異なる n 以下の自然数 i, j について, ${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = 0$ ならば, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立であることを示せ.

問題 3. F を 線形空間 V から W への同型写像とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底ならば, $F(\boldsymbol{v}_1), \ldots, F(\boldsymbol{v}_n)$ は, W の基底であることを示せ.

問題 4. 実数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表し, 任意の自然数 n に対して $a_n = b_n$ であるとき, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は等しいものとして, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

和とスカラー倍を

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty},$$
$$c\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ca_n\}_{n=1}^{\infty} \ (c \in \mathbb{R})$$

と定義するとき, 実数列の全体からなる集合 V_s は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる.(証明しなくて良い). このとき, 次の V_s の部分集合が $\mathbb{R}$ 上の線形空間であるかどうか, 理由とともに答えよ. ただし, 和とスカラー倍は V_s と同じものとする.

(1) 等差数列の全体.

(2) 等比数列の全体.

(線形部分空間であるための必要十分条件を用いて良い.)

問題 5. 次の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ に対して, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を V, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ によって張られる $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を W とする. $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 $V \cap W$ の基底を求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$