線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 10 月 12 日実施

学籍番号　　　　　　　　氏名

問題 ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立であるとする.

$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{a}_n$

ならば, $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_n = d_n$ であることを証明せよ.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 10 月 12 日配布

ベクトルの一次独立と一次従属　n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が独立であるとは,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \text{ ならば } c_1, c_2, \dots, c_n = 0$$

が成り立つことである. 一次独立でないとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は一次従属であるという.

問題

5. クラメルの公式を用いて, 次の行列の逆行列を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. 次のベクトルの集合が一次独立かどうか調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. n を自然数とする. $n+1$ 本の n 次元数ベクトルは必ず一次従属であることを示せ.

8. $n \times n$ 行列 A の各列を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, また, ${}^tA$ の各列を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$ とする. すなわち, $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_n)$, ${}^tA = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots \boldsymbol{b}_n)$ である. このとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$ が一次独立であることを示せ.

9. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を m 次元複素ベクトルとする. $j = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_{j+1}$ とし, $\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n$ とする. $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることを示せ.

10. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を m 次元複素ベクトルとし, A を m 次正方行列とする.

    (1) $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が一次従属ならば $A\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2, \dots, A\boldsymbol{a}_n$ も一次従属であることを示せ.

    (2) $A\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2, \dots, A\boldsymbol{a}_n$ が一次独立ならば, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ も一次独立であることを示せ.

    (3) $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立で, かつ, A が正則ならば $A\boldsymbol{a}_1, A\boldsymbol{a}_2, \dots, A\boldsymbol{a}_n$ も一次独立であることを示せ.

11. $m < n$ とし, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ を 一次独立な n 次元実ベクトルとする. ${}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ を満たす $\boldsymbol{b}$ 零ベクトルでないものが存在し, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ も一次独立となることを示せ.

12. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を n次元複素ベクトルとする. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が一次従属ならば, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合として表せないような n 次元複素ベクトル $\boldsymbol{b}$ が存在することを示せ.

13. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を n 次元実ベクトルで, いずれも零ベクトルでないとする. 任意の異なる n 以下の自然数 i, j について, ${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = 0$ ならば, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立であることを示せ.