線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 10 月 19 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 次のベクトルの集合が一次独立かどうか調べよ.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$$

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 10 月 19 日配布

14. A を $m \times n$ 行列とする. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_n$ を満たす n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体は線形空間であることを示せ. ただし, $\mathbf{0}_n$ は n 次元零ベクトルである.

15. 次で定義される線形空間の基底を一組求めよ. (線形空間であることの証明はしなくて良い.)

    (1) 3 次元行ベクトル $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ で, $x + y + z = 0$ を満たすものの全体.

    (2) 3 次元行ベクトル $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ で, $x - 2y + z = 0$ を満たすものの全体.

    (3) 3 次元行ベクトル $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ で, 連立一次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$ を満たすものの全体.

16. 次で定義される集合は $\mathbb{K}$ 上の線形空間であることを示し, 基底を一組求めよ. ただし, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (実数の全体), または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$(複素数の全体) である.

    (1) $\mathbb{K}$ を要素とする 2×3 行列の全体.

    (2) $\mathbb{K}$ を要素とする 3×3 行列 A で, ${}^tA = -A$ を満たすものの全体.

    (3) $\mathbb{K}$ を要素とする 2×3 行列 A で, $A\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_2$ を満たすものの全体. ただし, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である.

17. 次で定義される集合は $\mathbb{R}$ 上の線形空間であることを示し, 基底を一組求めよ.

    (1) x を変数とする実係数の 3 次以下の多項式全体：
    $V_0 = \{f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \,|\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

    (2) (1) で定めた V_0 の要素で, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ であるものの全体：
    $V_1 = \{f(x) \in V_0 \,|\, \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$

    (3) (1) で定めた V_0 に含まれる多項式の導関数全体：$V_2 = \{f'(x) \,|\, f(x) \in V_0\}$

    (4) (2) で定めた V_1 に含まれる多項式の導関数全体：$V_3 = \{f'(x) \,|\, f(x) \in V_1\}$

18. V_0 を 17(1) で定めた線形空間とし, $f(x) = x^3 + x^2$ とする.
    このとき, $\{f(x), f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)\}$ は V_0 の基底であることを示し, $g(x) = 2x^3 - x$ を, この基底の一次結合として表わせ. ただし, $f^{(3)}(x)$ は $f(x)$ の 3 次導関数である.