線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 10 月 26 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 F を線形空間 V から W への線形写像とする. このとき, $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ であることを示せ. ただし, $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_W$ は, それぞれ V, W の零ベクトルである.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 10 月 26 日配布

19. $\mathbb{K}^m$ から $\mathbb{K}^n$ への線形写像 F は, $n \times m$ 行列 X をうまくとると, $F(\boldsymbol{a}) = X\boldsymbol{a}$ と表されることを証明せよ.

20. 複素数の全体 $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間であることを示し, 基底を一組挙げよ.

21. F を 線形空間 V から W への同型写像とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底ならば, $F(\boldsymbol{v}_1), \ldots, F(\boldsymbol{v}_n)$ は, W の基底であることを示せ.

22. F を 線形空間 V から W への線形写像とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であっても, $F(\boldsymbol{v}_1), \ldots, F(\boldsymbol{v}_n)$ は, W の基底とならない例を挙げよ.

23. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形空間 V の基底ならば, V の任意の $n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+1}$ は一次従属であることを証明せよ.

24. V を線形空間とし, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V$ とする.
    $\mathbb{K}^n$ から V への線形写像 F を
    $F(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}) = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ と定める. F が同型写像ならば, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基底であることを示せ. (F が線形写像であることは示さなくてよい.)

25. U, V, W を線形空間とし, F を U から V への線形写像, G を V から W への線形写像とする. 合成写像 $G \circ F$ は, U から W への線形写像であることを示せ.

26. $m \neq n$ のとき, $\mathbb{K}^m$ から $\mathbb{K}^n$ への同型写像は存在しないことを示せ.

27. xy 平面内の直線 $L : y = ax + b$ を考える. 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が L 上にあるとき, $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, P が L 上にないときは, 直線 PQ が L と直交し, PQ の中点が L 上となるような点 Q の座標を (x', y') として, $F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と定める. F が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像となるための, a, b に関する条件を求めよ.

28. $V_0 = \{f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ とし, V_0 から $\mathbb{R}^2$ への写像を
    $$F(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \end{pmatrix}$$
    と定義すると, F は線形写像となることを示せ.