線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 11 月 2 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 $\mathbb{K}$ は 実数全体, または複素数全体からなる集合とする． 2×2 行列の全体 $V = M(2,2;\mathbb{K})$ は, 行列の加法, スカラー倍に関して, $\mathbb{K}$ 上の線形空間をなす. (証明しなくてよい.) 次の V の部分集合が $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるかどうか, 理由とともに答えよ. ただし, 和とスカラー倍は V と同じものとする.

(1) V に含まれる対称行列の全体.

(2) V に含まれる正則行列の全体.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 11 月 2 日配布

29. 2 次元複素数ベクトルの全体 $\mathbb{C}^2$ は, スカラー倍のスカラーを実数に制限することによって, $\mathbb{R}$ 上の線形空間と見なすことができる (証明しなくて良い). $\mathbb{C}^2$ の基底を一組挙げよ.

30. 実数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表し, 任意の自然数 n に対して $a_n = b_n$ であるとき, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は等しいものとして, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く.

    和とスカラー倍を

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty},$$
$$c\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ca_n\}_{n=1}^{\infty} \ (c \in \mathbb{R})$$

    と定義するとき, 実数列の全体からなる集合 V_s は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる.(証明しなくて良い). このとき, 次の V_s の部分集合が $\mathbb{R}$ 上の線形空間であるかどうか, 理由とともに答えよ. ただし, 和とスカラー倍は V_s と同じものとする.

    (1) 等差数列の全体.

    (2) 等比数列の全体.

    (3) 漸化式 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体.

    (4) 漸化式 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体.

    (5) コーシー列の全体.

    (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ である数列の全体.

    (7) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が収束するような数列の全体.

31. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ と $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ が, どちらも $\mathbb{K}$ 上の線形空間 V の基底ならば, $m = n$ であることを証明せよ.

32. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間 V の基底であるとする. $m < n$ とし, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が一次独立ならば, $n - m$ 個のベクトル $\boldsymbol{w}_{m+1}, \boldsymbol{w}_{m+2} \ldots, \boldsymbol{w}_n \in V$ を付け加えることにより, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ も V の基底とあることを証明せよ.

33. V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V$ とし,

$$W = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \,|\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

    と定義すると W は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる (証明しなくて良い). $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が W の基底ならば, $m \leq n$ であることを示せ.

34. F を線形空間 V から W への線形写像とする. $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とし, $\boldsymbol{v}_0 \neq \boldsymbol{0}_V$, $F(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{0}_W$, かつ, $F(\boldsymbol{v}_1), F(\boldsymbol{v}_2), \ldots, F(\boldsymbol{v}_n)$ が一次独立ならば $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立であることを示せ. ただし, $\boldsymbol{0}_V, \boldsymbol{0}_W$ は それぞれ, V, W の零ベクトルである.