線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 11 月 16 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 A を 2×3 複素行列とする．このとき $V = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\}$ は, $\mathbb{C}^2$ の線形部分空間であることを示せ.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 11 月 16 日配布

35. U を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, V, W を U の線形部分空間とする.

(1) $V \cap W$ は, U の線形部分空間であることを示せ.

(2) $\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \,|\, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\}$ は U の線形部分空間であることを示せ. (この部分空間を V と W の和空間とよび, $V+W$ と表す.)

36. 次の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ に対して, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を V, $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ によって張られる $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を W とする. $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 $V \cap W$ の基底を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

37. $\boldsymbol{a} = (2,2,1,3), \boldsymbol{b} = (0,1,0,2), \boldsymbol{c} = (2,0,1,-1)$ とする. $\boldsymbol{ax} = 0, \boldsymbol{bx} = 0, \boldsymbol{cx} = 0$ を満たす 4 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体からなる集合 V は, $\mathbb{C}^4$ の線形部分空間であることを示し, V の基底を求めよ.

38. x を変数とする実係数の 3 次以下の多項式全体：

$V = \{f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \,|\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ は, $\mathbb{R}$ 上の線形空間である. 以下に答えよ.

(1) $\{f(x) \in V \,|\, \int_0^1 (x-1)f(x)dx = 0\}$ は, V の線形部分空間であることを示し, その基底を求めよ.

(2) $\{f(x) \in V \,|\, \int_0^1 (x-1)f(x)dx = 0,$ かつ $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx = 0\}$ は, V の線形部分空間であることを示し, その基底を求めよ.

39. V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする. F を V から $\mathbb{K}$ の写像の全体とし, $f, g \in F, c \in \mathbb{K}$ に対して, 和とスカラー倍を

$(f+g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}),\ (cf)(\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$

と定義すると, F は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる (証明しなくてよい). V から $\mathbb{K}$ への線形写像の全体を L とするとき, 以下に答えよ.

(1) L は F の線形部分空間であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底であるとする. $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i \in V$ に対して

$$f_j(\boldsymbol{x}) = c_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

によって定義される n 個の写像, $f_1, \ldots, f_n$ は, L の基底であることを示せ.