線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 12 月 14 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 V, W を $\mathbb{K}$ 上の n 次元線形空間とし, $F : V \to W$ を線形同型写像とする. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して, W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ をうまく定めると, 基底 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ による F の行列表示は, n 次元単位行列となることを示せ.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 12 月 14 日配布

線形空間の座標と基底変換

- V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ を V の基底とする. このとき, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が一意に定まるが, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ を, 基底 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が定める $\boldsymbol{v}$ の**座標**と呼ぶ.

- $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n), (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ を共に, V の基底とする. $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $\boldsymbol{u_j}$ の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が定める座標を $\begin{pmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$ とする. このとき, $P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$ を, 基底 $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ から $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ への**基底取り換え行列**と呼ぶ.

注. 「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を基底とする」と書かずに, 「$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ を基底とする」と書いているのは, 並べる順番が変わると座標が変わってしまうからである. 特に, 問題 45 では, 順序が重要なので, 統一して ( ) でくくって, ベクトルと同じように順序に意味があることを表した.

問題　以下に出てくる $\mathbb{K}$ は 実数の全体 $\mathbb{R}$ または複素集の全体 $\mathbb{C}$ を表すものとする.

40. V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ を V の基底, $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ を W の基底とする. また, $F : V \to W$ を線形写像とする.

    $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $F(\boldsymbol{v}_j)$ の 基底 $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ が定める座標を $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$ とし,

    $$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$ と定める.

    $\boldsymbol{v} \in V$ の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が定める座標を $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $F(\boldsymbol{v})$ の基底 $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ が定める座標を $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$ とすると, $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

41. V を $\mathbb{K}$ 上の n 次元線形空間とし, W を V の m 次元線形部分空間とする. ただし, $m < n$ とする. $F : W \to V$ を包含写像, すなわち, $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $F(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \in V$ とする. V, W の基底をうまくとると, F の行列表示は, $\begin{pmatrix} E_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix}$ となることを示せ. ただし, E_m は m 次元単位行列, $O_{n-m,m}$ は $(n-m) \times m$ の零行列である.

42. $M(2,2;\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ の元を成分とする 2 次正方行列全体からなる線形空間とする. $i, j = 1, 2$ に対して, E_{ij} を (i,j) 成分が 1 で他の成分はすべて 0 である 2 次正方行列とする. また, 写像 $G : M(2,2;\mathbb{K}) \to M(2,2;\boldsymbol{K})$ を $G(V) = \dfrac{1}{2}(V + {}^tV)$ と定義する. G は線形写像であることを示し, G の基底 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ による行列表示を求めよ. ($(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ が基底であることは示せなくてよい.)

43. 問題 42 において, $F_1 = E_{11}, F_2 = G(E_{12}), F_3 = E_{22}, F_4 = E_{12} - G(E_{12})$ とする. このとき, 以下に答えよ.

(1) (F_1, F_2, F_3, F_4) は $M(2,2;\mathbb{K})$ の基底であることを示し, 基底 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ から (F_1, F_2, F_3, F_4) への取り換え行列を求めよ.

(2) G の 基底 (F_1, F_2, F_3, F_4) による行列表示を求めよ.

44. V を $\mathbb{K}$ の要素を係数とする x の 2 次以下の多項式全体からなる線形空間とし, 基底として, $(f_1(x) \equiv 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2)$ を考える. 以下で定義される写像 $G : V \to V$ は線形写像であることを示し, G の 基底 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ による行列表示を求めよ.

(1) $G(f(x)) = f(x) + f'(x)$

(2) $G(f(x)) = xf'(x)$.

(3) $G(f(x)) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. (ただし, $x = 0$ のとき右辺は定義されないので, 別途右辺 $= 0$ と定義して, $\mathbb{K}$ 上の多項式とみなす.)

45. $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ を, 問題 42 で定義した 2 次正方行列とする.

(1) 線形空間 $M(2,2;\mathbb{K})$ において, 基底 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ から, 基底 $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ への基底取り換え行列を求めよ.

(2) 線形写像 $F : M(2,2;\mathbb{K}) \to M(2,2;\mathbb{K})$ を $F(V) = {}^tV$ によって定める. F の 基底 $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ による行列表示を求めよ.