線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 29 年 12 月 21 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 29 年 12 月 21 日配布

46. 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求め, 験算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 18 & -14 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

47. 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求め, 験算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

48. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化可能なものは対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ -3 & -21 & -2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 10 & -2 & -11 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & -12 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

49. 次の固有値, 固有ベクトルを持つような 2 次正方行列を求めよ.

(1) { 固有値, 固有ベクトル } $= \left\{1, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{2, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

(2) { 固有値, 固有ベクトル } $= \left\{2, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{-1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

50. A を $m \times n$ 行列とする. $m < n$ のとき, $B = {}^tAA$ は固有値 0 を持つことを示せ.

51. A を $m \times n$ 行列, B を $n \times m$ 行列とする. λ が $X = AB$ の 0 でない固有値ならば, $Y = BA$ も固有値 λ を持つことを示せ.

52. A を n 次正方行列とする. A が固有値 0 を持つための必要十分条件は $\mathrm{rank}A < n$ であることを示せ.

53. 線形写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の 基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ による表現行列 A が次で与えられるとする. ただし, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. F の基底 $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ に関する表現行列が対角行列となるような $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ を一組求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$