線形代数演習 II 小テスト

担当：若木 宏文

平成 30 年 1 月 25 日実施

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求め, ケイリー・ハミルトンの定理を利用して, A^{-1} を求めよ.

線形代数演習 II

担当：若木 宏文

平成 30 年 1 月 25 日配布

標準内積とノルム, 角度　ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

を, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の**標準内積**という. また $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$ を, $\boldsymbol{v}$ の**(標準的な) ノルム**あるいは, **長さ**といい,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|}$$

となる $\theta \in [0, \pi]$ を **$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ のなす角**という. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という.

※ 以下の問題では, 内積, ノルム, ベクトルのなす角はすべて, 標準内積に基づくものとする.

60. 次で与えられる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ を張ることを示し, $< \boldsymbol{v}_1 > = < \boldsymbol{u}_1 >$, $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 >$ を満たすような $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ.
ただし, $< \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k >$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ によって張られる線形部分空間を表す.

    (1) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

    (2) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

61. グラムシュミットの直交化法を根拠に, 実数を成分とする任意の正則行列 A は, 直交行列 H と 上三角行列 T を用いて $A = HT$ と表されることを示せ.

62. 次のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ によって張られる $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間を V とするとき, V の直交補空間の正規直交基底を一組求めよ.

    (1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$