10/8 に出題した宿題

次の命題を証明せよ.

命題　f を広義の区間 J で定義された凸関数とする. このとき, $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$, $t_1 > 0, \cdots, t_n > 0$ ならば $x_1, \ldots, x_n \in J$ に対して

$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)$$

が成り立つ.

(ヒント)
　帰納法で示すとして, 例えば

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n = (1 - t_n) y + t_n x_n$$

と表す.

$n=2$ のとき, 与式は

$$f(t_1x_1+t_2x_2)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)$$

であるから, 凸関数の定義から成り立つ.

$n=k$ のとき成り立つと仮定する. $n=k+1$ のとき示すべき式は

<eq-2>

$$f(t_1x_1+\cdots+t_{k+1}x_{k+1})\le t_1f(x_1)+\cdots+t_{k+1}f(x_{k+1}) \tag{1}$$

である.

$$y=\frac{t_1x_1+\cdots+t_kx_k}{1-t_{k+1}}$$

とおくと,

<eq-3>

$$y=s_1x_1+\cdots+s_kx_k,\quad s_j=\frac{t_j}{1-t_{k+1}}=\frac{t_j}{t_1+\cdots+t_k}\quad (j=1,\dots,k) \tag{2}$$

と表されるから, $y\in J$ である. したがって f が凸関数であることより

<eq-1>

$$f(t_1x_1+\cdots+t_{k+1}x_{k+1})=f((1-t_{k+1})y+t_{k+1}x_{k+1})\le(1-t_k)f(y)+t_{k+1}f(x_{k+1}) \tag{3}$$

また, 帰納法の仮定より

$$f(y)=f(s_1x_1+\cdots+s_kx_k)\le s_1f(x_1)+\cdots+s_kf(x_k)$$

この右辺を (3) の $f(y)$ に代入すれば $(1-t_{k+1})s_j=t_k$ から (1) が得られる.