# 10/22 に出題した宿題

$\sin x$ はつぎのように Maclaurin 展開できることを示せ.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots ,$$
$$x \in (-\infty, \infty)$$

$f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ より $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$

$$f^{(2n)}(0)=\sin(n\pi)=0,$$
$$f^{2n-1}(0)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)=(-1)^{n-1},\quad n=1,2,\cdots$$

であるから Taylor の定理より

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n},$$
$$R_{2n}=\frac{\sin(\theta x+n\pi)}{(2n)!}x^{2n}\quad(0<^{\exists}\theta<1),\quad |R_{2n}|\leq\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$N=[2|x|+1]$ (ガウス記号)

ととると, $n\geq N$ ならば $\left|\dfrac{x}{n}\right|\leq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$|R_n|\leq\frac{|x^N|}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-N}\to 0\quad(n\to\infty)$$

剰余項が 0 に収束するので, Maclaurin 展開可能である.