

10/29 に出題した宿題

区間  $[0, 1]$  上の関数  $f(x)$  を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ -1 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$\Delta$  を  $[0, 1]$  の分割とするととき,  $S_\Delta, s_\Delta$  の値を求めよ.

分割  $\Delta$  を

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots, x_n = 1$$

とすると,  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) はすべて有理数も無理数も含むので  $i = 1, \dots, n$  について

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 1, \\ m_i &= \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = -1 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 1, \\ s_\Delta &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = (-1) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = -1. \end{aligned}$$