11/12 に出題した宿題

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上で定義された有界な可積分関数とする. c を定数とするとき, $(cf)(x) = cf(x)$ $(x \in [a,b])$ によって定義される関数 cf も $[a,b]$ 上可積分であって,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ.

分割 $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ と $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ に対する f と cf のリーマン和を, それぞれ

$$S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(f)} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$
$$S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(cf)} = \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

と表すと. $S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(cf)} = cS_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(f)}$ である。

$c = 0$ のときは, 任意の分割に対して $S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(cf)} = 0$ であるから, $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(cf)} = 0$ となり, cf は可積分で,

$$\int_a^b cf(x)dx = 0 = c \times \int_a^b f(x)dx$$

$c \neq 0$ のとき, f は閉区間 $[a, b]$ で可積分であるから, 任意の ε に対して $\delta > 0$ が存在して, $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\left| S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(f)} - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

を満たす. このとき

$$\left| S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(cf)} - c\int_a^b f(x)dx \right| = |c| \left| S_{\Delta,\boldsymbol{\xi}}^{(f)} - \int_a^b f(x)dx \right| < |c| \times \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

であるから, cf も可積分で,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$