レポート問題解答

問題 1 (1) $f^{(n)}(x) = \dfrac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$ と予想できる.

$n = 0$ のときは成立しており, 右辺をもう一回微分すると

$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{2}\{e^x + (-1)^n(-e^{-x})\} = \dfrac{e^x + (-1)^{n+1}e^{-x}}{2}$

となるから数学的帰納法により, 予想は正しい.

(2) (1) より剰余項は $R_n = \dfrac{e^{\theta x} + (-1)^n e^{-\theta x}}{2}\dfrac{x^n}{n!}$ $(0 < \theta < 1)$ と書ける.

$-1 < \theta x < 1$ より, $\dfrac{e^{\theta x} + (-1)^n e^{-\theta x}}{2}$ は有界であるから,

$n \to \infty$ のとき $\dfrac{x^n}{n!} \to 0$ を示せばよい.

$N > 2|x|$ を満たす自然数 N をとると, $n > N$ ならば $\dfrac{1}{2} > \dfrac{|x|}{n}$ であるから

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left\{\prod_{k=1}^{N}\frac{|x|}{k}\right\}\prod_{k=N+1}^{n}\frac{|x|}{k} < \left\{\prod_{k=1}^{N}\frac{|x|}{k}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0 \ (n \to \infty)$$

問題 2 $f(x)$ は $(-1, 1)$ で無限回微分可能であるから, $g(x)$ も $(-1, 1)$ で無限回微分可能である.

$k \geq 3$ のとき

$$\frac{d^k}{dx^k}\{x^3 f(x)\} = \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j\{\frac{d^j x^3}{dx^j}\}f^{(k-j)}(x)$$
$$= x^3 f^{(k)}(x) + 3kx^2 f^{(k-1)}(x) + 3k(k-1)xf^{(k-2)}(x) + k(k-1)(k-2)f^{(k-3)}(x) \tag{1}$$

$k = 0, 1, 2$ の場合は, それぞれ, 上式の初項, 第 2 項, 第 3 項まで.

したがって $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, g^{(k)}(0) = k(k-1)(k-2)f^{(k-3)}(0)$ $(k \geq 3)$

となり, マクローリンの定理より

$$g(x) = \sum_{k=3}^{n+2}\frac{k(k-1)(k-2)f^{(k-3)}(0)}{k!}x^k + R_{g,n+3}$$
$$x^3 f(x) = \sum_{k=3}^{n+2}\frac{f^{(k-3)}(0)}{(k-3)!}x^k + R_{g,n+3} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{f^{(\ell)}}{\ell!}x^{\ell+3} + R_{g,n+3} \tag{2}$$
$$R_{g,n+3} = \frac{g^{(n+3)}(\theta x)}{n!}x^n \ (0 < \theta < 1)$$

と表される. 一方 $f(x)$ はマクローリン展開可能であるから

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{f^{(\ell)}}{\ell!}x^{\ell} + R_{f,n} \tag{3}$$

とすると, $\lim_{n\to\infty} R_{f,n} = 0$ である. (2) の $f(x)$ に (3) を代入すると $R_{g,n+3} = x^3 R_{f,n}$ が得られるので

$$R_{g,n+3} = x^3 R_{f,n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

注. (3) の剰余項は $R_{n,f} = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$ と表され, (2) の剰余項は (1) より

$$\begin{aligned} R_{g,n} = \Big\{ &(\theta' x)^3 f^{(n)}(\theta' x) + 3k(\theta' x)^2 f^{(n-1)}(\theta' x) \\ &+ 3k(n-1)(\theta' x) f^{(n-2)}(\theta' x) + n(n-1)(n-2) f^{(n-3)}(\theta' x) \Big\} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

と表されるが θ と θ' が同じとは限らないので同じ θ を使って

$$\begin{aligned} R_{g,n} = &(\theta x)^3 R_{f,n} + 3k(\theta x)^2 R_{f,n-1} \frac{x}{n} \\ &+ 3k(n-1)(\theta x) R_{f,n-2} \frac{x^2}{n(n-1)} + n(n-1)(n-2) R_{f,n-3} \frac{x^3}{n(n-1)(n-2)} \to 0 \end{aligned}$$

とするのは間違いである.

問題 3 f は $[-1, 1]$ で有界であるから $m < f(x) << M$ を満たす m, M が存在する.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \min\Big\{0.5, \dfrac{\varepsilon}{6(M-m)}\Big\}$ とする.
f は $[-1, -\delta]$ および $[\delta, 1]$ で連続であるからリーマン積分可能で, したがって $[-1, -\delta]$ の分割 Δ_1 と $[\delta, 1]$ の分割 Δ_2 が存在して,
それぞれの区間での過剰和, 不足和を S_{Δ_1}, s_{Δ_1}, S_{Δ_2}, s_{Δ_2} とすると

$$S_{\Delta_1} - s_{\Delta_1} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S_{\Delta_2} - s_{\Delta_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ.

$$\sup_{x\in[-\delta,\delta]} f(x) - \inf_{x\in[-\delta,\delta]} f(x) < (M - m)$$

であるから, Δ_1 と Δ_2 の分点を合わせた $[-1, 1]$ の分割を Δ とすると

$$\begin{aligned} S_\Delta - s_\Delta &= S_{\Delta_1} - s_{\Delta_1} + 2\delta\Big\{\sup_{x\in[-\delta,\delta]} f(x) - \inf_{x\in[-\delta,\delta]}\Big\} + S_{\Delta_2} - s_{\Delta_2} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2\delta(M - m) + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon \end{aligned}$$

問題 4

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S_\Delta \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割 }\}$$

であるから $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ は $\{S_\Delta \mid \Delta$ は $[a, b]$ の分割 $\}$ の下界の最大値である.

一方, 仮定より S も $\{S_\Delta \,|\, \Delta$ は $[a,b]$ の分割 $\}$ の下界であるから $S \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$ がわかる.

$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le S_{\Delta_n}$ より $\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$ より $\overline{\int_a^b} f(x)dx \le S$ でもある.

したがって $S = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ である.

問題 5 略 (テキストの定理)

注, 通常の手順では, 積分の平均値の定理を用いて微分積分学の基本定理を証明するので, 定積分を原始関数の差で表して, 微分の平均値の定理を利用する証明は, 間違っている.

命題 P, Q に対して, $P \Rightarrow Q$ と $Q \Rightarrow P$ が真であることを示しても, P と Q が共に真であることの証明にはならない. $P \Rightarrow Q$ と $Q \Rightarrow P$ に加えて, P または Q のどちらか一方を別の方法で証明しなければ, P, Q の両方が真であるとは言えない.

問題 6 積分定数は省略している.

(1) $\int (\log x)^k dx = x(\log x)^k - \int xk(\log x)^{k-1}\frac{1}{x} = x(\log x)^k - k\int (\log x)^{k-1}dx$ を繰り返し使う.

(2) $(1-\sin x)$ を分母分子に掛けてもできるが, $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\sin(x) = \sin\Big(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\Big) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\{1+\tan^2\frac{x}{2}\} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

より

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t} = \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

(3) $t = e^x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = e^x = t$ より $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}dx &= \int \frac{1}{1+t+t^2}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t} - \frac{t+1}{1+t+t^2}dt \\ &= \log t - \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{1+t+t^2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt \\ &= \log t - \frac{1}{2}\log(1+t+t^2) - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\Big\{\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\Big\} \\ &= x - \frac{1}{2}\log(1+e^x+e^{2x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

問題 7 (1) 合成関数の微分より $G'(t) = (b-a)f'(a+t(b-a))$

(2) $G(t)$ は $(b-a)f'(a+t(b-a))$ の原始関数であるから

$$G(b) - G(a) = \int_a^b (b-a)f'(a+t(b-a))dt = (b-a)\int_a^b f'(a+t(b-a))dt$$

(3)

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(a+t(b-a))dt = \int_0^1 \{-\frac{1}{k}(1-t)^k\}' f^{(k)}(a+t(b-a))dt$$
$$= [-\frac{1}{k}(1-t)^k]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k}(1-t)^k f^{(k+1)}(a+t(b-a))(b-a)dt$$
$$= \frac{f^{(k)}(a)}{k} + \frac{b-a}{k}\int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+t(b-a))dt$$

(4) $n=1$ のとき, 与式は (2) と同じであるから成立する. 与式の n を k $(k<n)$ で置き換えたものが成り立つと仮定すると, (3) より

$$R_k = \frac{(b-a)^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(a+t(b-a))dt$$
$$= \frac{(b-a)^k}{(k-1)!}\left\{\frac{f^k(a)}{k} + \frac{b-a}{(k)}\int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+t(b-a))\right\}$$
$$= \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+t(b-a))dt$$

であるから, n を $k+1$ で置き換えても成り立つ. (3) は $k<n$ である限り成り立つので帰納的に与式が成り立つ.