解析学 II レポート問題

レポート用紙に, 解答を作成し、学生番号、氏名、提出日を記入して
平成 28 年 1 月 8 日 (金) までに、
数学事務室カウンター前のボックスに
提出すること.

問題 1 (1) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ とする. n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を n を用いて表わせ.
(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上でマクローリン展開可能であることを示せ.

問題 2 $f(x)$ は, 区間 $(-1,1)$ でマクローリン展開可能であるとする. このとき, $g(x) = x^3 f(x)$ は $(-1,1)$ でマクローリン展開可能であることを示せ.

問題 3 $f(x)$ は, 閉区間 $[-1,1]$ 上で定義された有界な関数で, $x=0$ 以外の点で連続であるとする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$ であるような 閉区間 $[-1,1]$ の分割 Δ が存在することを示せ.

問題 4 $f(x)$ は 閉区間 $[a,b]$ で定義された有界な関数とする. S を定数とし, 任意の $[a,b]$ の分割 Δ に対して $S_\Delta \geq S$ であり, かつ, $\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$ であるような $[a,b]$ の分割の列 $\{\Delta_n;\ n = 1,2,\ldots\}$ が存在するならば, f の上積分は S に一致することを示せ.

問題 5 積分の平均値の定理を証明せよ.

問題 6 次の不定積分を求めよ.

$$(1)\ \int (\log x)^3 dx \quad (2)\ \int \frac{1}{1+\sin x}dx \quad (3)\ \int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}dx$$

問題 7 n を自然数とする. $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された C^n 級関数とし, 定数 $a,b \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $G(t)$ を

$$G(t) = f(a + t(b-a))$$

と定義する.

(1) $G(t)$ の導関数を f の導関数と, a,b,t を用いて表わせ.

(2) $f(b) - f(a) = (b-a)\displaystyle\int_0^1 f'(a+t(b-a))dt$ と表されることを示せ.

(3) n より小さい自然数 k に対して, 次が成り立つことを示せ.
$$\int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(a+t(b-a))dt = \frac{f^{(k)}(a)}{k} + \frac{b-a}{k}\int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(a+t(b-a))dt$$

(4) $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$ と表すとき,
$R_n = \dfrac{(b-a)^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(b-a))dt$ と表されることを示せ.