# 確率・統計 A 期末模擬試験

平成１５年７月２２日

1.　$X, Y$ は互いに独立な離散型確率変数で，$X, Y$ ともに，非負の整数値しか取らないものとする．$\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$ がともに有限の値であるとき，$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ であることを，期待値と分散，共分散の定義のみを用いて表せ．

2.　$C$ を実数，$a \geq 0$ とし，$(X, Y)$ は，次で定義される確率密度関数 $f(x, y)$ をもつ２次元連続型確率変数であるとする．

$$f(x,y) = \begin{cases} Cy(1+ax)^2 e^{-x-y-axy} & (x > 0, y > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) $C$ の値を求めよ．

(2) $X$ の周辺確率密度関数を求めよ．

(3) $X = 2$ が与えられたときの $Y$ の条件付き期待値を求めよ．

(4) $X, Y$ が独立となるような $a$ の値を求めよ．

(5) $Y = y$ が与えられたときの $X$ の条件付き期待値を $g(y)$ と表すとき，$E[g(Y)]$ を求めよ．

3.　２次元離散型確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ と $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ は独立で，

$$P\{\boldsymbol{X} = (i,j)\} = P\{\boldsymbol{Y} = (i,j)\} = p_{ij} \quad (i = 0, 1; j = 0, 1)$$
$$p_{00} = p_{11},\ p_{10} = p_{01},\ p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$$

を満たすとする．$Z_1 = X_1 - Y_1, Z_2 = X_2 - Y_2$ とおく．$p_{00}$ の値を $a$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $X_1$ の周辺確率関数を $a$ を用いて表せ．

(2) $Z_1$ の期待値を求めよ．

(3) $P(Z_1 = i, Z_2 = j)$ の値を，$i = -1, 0, 1; j = -1, 0, 1$ について全て求めよ．

(4) $Z_2 = 0$ が与えられたときの $Z_1$ の条件付き確率関数を $a$ を用いて表せ．

(5) $Z_1$ と $Z_2$ が独立となるような $a$ の値を求めよ．

解答 1.　$f(i) = P(X = i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$, $g(i) = P(Y = i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと，$X, Y$ が独立であることから，$(X, Y)$ の確率関数は，$P(X = i, Y = j) = f(i)g(j)$ $(i, j = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられる．$\mu_x = \mathrm{E}(X), \mu_y = \mathrm{E}(Y)$ とおくと定義から，$\mu_x = \sum_{i=0}^{\infty} if(i)$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i - \mu_x)(j - \mu_y)f(i)g(j) = \sum_{i=0}^{\infty}(i - \mu_x)f(i)\sum_{j=0}^{\infty}(j - \mu_y)g(j)$$

$$= \{\sum_{i=0}^{\infty} if(i) - \mu_x \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\} \sum_{j=0}^{\infty}(j - \mu_y)g(j) = (\mu_x - \mu_x)\sum_{j=0}^{\infty}(j - \mu_y)g(j) = 0$$

解答 2.　(1)

$$1 = \int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} Cy(1 + ax)^2 e^{-x-y-axy}dy\right\}dx$$

$t = y(1 + ax)$ と変数変換すると内側の積分は

$$Ce^{-x}\int_0^{\infty} te^{-t}dt = Ce^{-x}\left\{[-te^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}dt\right\} = Ce^{-x}$$

これを上式に代入して $x$ について積分すると $1 = C$ が得られる．

(2) 上で計算した，内側の積分が，$X$ の周辺確率密度関数である．これを $h(x)$ と表すと $h(x) = e^{-x}$

(3) $x = 2$ が与えられたときの $Y$ の条件付き確率密度関数は，(1), (2) より

$$f_{Y|X}(y|2) = f(2, y)/h(2) = y(1 + 2a)^2 e^{-y(1+2a)}$$

したがって，

$$\mathrm{E}[Y|X = 2] = \int_0^{\infty} y^2(1 + 2a)^2 e^{-y(1+2a)}dy$$

(1) と同じ変数変換を考えると，

$$\mathrm{E}[Y|X = 2] = \frac{1}{1 + 2a}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt = \frac{2}{(1 + 2a)}$$

(4) (3) と同様に，$X = x$ が与えられたときの $Y$ の条件付き期待値を計算すると $\mathrm{E}[Y|X = x] = \frac{2}{1+ax}$ となる．$X, Y$ が独立であれば，任意の $x$ に対して $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Y|X = x]$ でなければならないので，$a = 0$．逆に，$a = 0$ であれば同時確率密度関数は，周辺確率密度関数の積と同じことがわかるので，$a = 0$ が求める値．

(5) 条件付き期待値の性質から，$\mathrm{E}[g(Y)] = \mathrm{E}[X]$．したがって

$$\mathrm{E}[g(Y)] = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1$$

解答 3.

(1) 条件より，$p_{11} = a, p_{01} = p_{10} = \frac{1-2a}{2}$．$X_1$ の確率関数を $f(x)$ とすると，

$$f(0) = p_{00} + p_{01} = \frac{1}{2}, f(1) = p_{10} + p_{11} = \frac{1}{2}, \text{その他の } x \text{ について } f(x) = 0$$

(2) $\mathrm{E}[Z_1]=\mathrm{E}[X_1]-\mathrm{E}[Y_1]$，$X_1$ と $Y_1$ の確率関数は同じなので，期待値も同じ．したがって，$\mathrm{E}[Z_1]=0$

(3)

$Z_1,Z_2$ のとりうる値は $-1,0,1$, $P\{Z_1,Z_2=(k,l)\}=q_{(k,l)}$ $(k,l=-1,0,1)$ と表す.

$$
\begin{aligned}
q_{(-1,-1)} &= P\{\boldsymbol{X}=(0,0),\boldsymbol{Y}=(1,1)\}=p_{00}p_{11}=a^2\\
q_{(-1,0)} &= P\{\boldsymbol{X}=(0,0),\boldsymbol{Y}=(1,0)\}\\
&\qquad +P\{\boldsymbol{X}=(0,1),\boldsymbol{Y}=(1,1)\}=p_{00}p_{10}+p_{01}p_{11}=a(1-2a)\\
q_{(-1,1)} &= P\{\boldsymbol{X}=(0,1),\boldsymbol{Y}=(1,0)\}=p_{01}p_{10}=\frac{1}{4}(1-2a)^2\\
q_{(0,-1)} &= P\{\boldsymbol{X}=(0,0),\boldsymbol{Y}=(0,1)\}\\
&\qquad +P\{\boldsymbol{X}=(1,0),\boldsymbol{Y}=(1,1)\}=p_{00}p_{01}+p_{11}p_{01}=a(1-2a)\\
q_{(0,0)} &= P\{\boldsymbol{X}=(0,0),\boldsymbol{Y}=(0,0)\}+P\{\boldsymbol{X}=(0,1),\boldsymbol{Y}=(0,1)\}\\
&\qquad +P\{\boldsymbol{X}=(1,0),\boldsymbol{Y}=(1,0)\}+P\{\boldsymbol{X}=(1,1),\boldsymbol{Y}=(1,1)\}\\
&= p_{00}^2+p_{01}^2+p_{10}^2+p_{11}^2=2a^2+\frac{1}{2}(1-2a)^2\\
q_{(0,1)} &= P\{\boldsymbol{X}=(0,1),\boldsymbol{Y}=(0,0)\}\\
&\qquad +P\{\boldsymbol{X}=(1,1),\boldsymbol{Y}=(1,0)\}=p_{01}p_{00}+p_{11}p_{10}=a(1-2a)\\
q_{(1,-1)} &= P\{\boldsymbol{X}=(1,0),\boldsymbol{Y}=(0,1)\}=p_{10}p_{01}=\frac{1}{4}(1-2a)^2\\
q_{(1,0)} &= P\{\boldsymbol{X}=(1,0),\boldsymbol{Y}=(0,0)\}\\
&\qquad +P\{\boldsymbol{X}=(1,1),\boldsymbol{Y}=(0,1)\}=p_{10}p_{00}+p_{11}p_{01}=a(1-2a)\\
q_{(1,1)} &= P\{\boldsymbol{X}=(1,1),\boldsymbol{Y}=(0,0)\}=p_{11}p_{00}=a^2
\end{aligned}
$$

(4)

$$P(Z_2=0)=q_{(-1,0)}+q_{(0,0)}+q_{(1,0)}=2a^2+\frac{1}{2}(1-2a)^2+2a(1-2a)=\frac{1}{2}$$

より

$$
\begin{aligned}
P(Z_1=-1|Z_2=0)&=2a(1-2a)\\
P(Z_1=0|Z_2=0)&=4a^2+(1-2a)^2\\
P(Z_1=1|Z_2=0)&=2a(1-2a)
\end{aligned}
$$

(5)

$$q_{(-1,-1)}:q_{(-1,0)}:q_{(-1,1)}=q_{(0,-1)}:q_{(0,0)}:q_{(0,1)}=q_{(1,-1)}:q_{(1,0)}:q_{(1,1)} \tag{1}$$

であることが独立であるための必要十分条件.

$q_{(-1,-1)}:q_{(-1,1)}=q_{(1,-1)}:q_{(1,1)}$ より $a^4=\frac{1}{16}(1-2a)^4$ これを解くと，$a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$ のとき (1) を満たすので，$a=\frac{1}{4}$ が $Z_1,Z_2$ が独立であるための必要十分条件である.