確率・統計 A 中間試験問題

平成 17 年 5 月 31 日

問題 1. (1) $\mathcal{B}$ が σ–集合体であることの定義を書け。

(2) $(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間とする。σ–集合体の定義のみを用いて次を証明せよ。

$$A, B \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \in \mathcal{B}$$

問題 2. (1) P が 可測空間 $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度であることの定義を書け。

(2) $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とする。確率測度の定義のみを用いて次を証明せよ。

$$\mathrm{P}\big((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$$

問題 3. X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする。$\boldsymbol{B}_1$ を１次元ボレル集合体とし，$A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\},$$
$$\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))$$

と定義するとき、次を証明せよ。（P_X が確率測度となるという定理は用いてはいけない。）

(1) $A \in \boldsymbol{B}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}_X(A^c) = 1 - \mathrm{P}_X(A)$

(2) $A, B \in \boldsymbol{B}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}_X(A \cup B) \le \mathrm{P}_X(A) + \mathrm{P}_X(B)$

問題 4. 表が出る確率が $\frac{1}{2}$ であるコイン A と、表が出る確率が p $(0 < p < 1)$ であるコイン B がある。まず、コイン B を投げて、

表が出たら、コイン A
裏が出たら、コイン B

を投げる。

(1) ２回目に投げた結果、表が出たという条件の下で、１回目が表であった条件つき確率を求めよ。

(2) １回目に裏が出るという事象と２回目に裏が出るという事象が独立であるための必要十分条件は、$p = \frac{1}{2}$ であることを証明せよ。

問題 5. 表が出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを３回投げて、表が出た回数を X とする。X の分布関数のグラフを描け。

問題 6. X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする。X の分布関数は単調増加関数であることを証明せよ。