確率・統計 A 中間試験

平成１４年５月３１日

問題１

(1) $(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間とする．$\mathcal{B}$ 上の実数値関数 $\mathrm{P} : \mathcal{B} \to \boldsymbol{R}^1$ が確率測度であることの定義を書け．

(2) $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とする．Ω 上の実数値関数 $X : \Omega \to \boldsymbol{R}^1$ が確率変数であることの定義を書け．

問題２ サイコロを２回投げる試行において，１回目に出たサイコロの目を X，２回目に出たサイコロの目を Y とする．次の３つの事象 A, B, C について以下の問いに答えよ．

$$
\begin{aligned}
&A : X + Y \text{ が奇数であるという事象} \\
&B : X + Y \leq 6 \text{ であるという事象} \\
&C : X \leq 3 \text{ であるという事象}
\end{aligned}
$$

(1) 事象 B が与えられたときの，事象 A の条件付き確率 $\mathrm{P}(A|B)$ を求めよ．

(2) A, B は独立か．理由をつけて答えよ．

(3) A, C は独立か．理由をつけて答えよ．

問題３ 銅貨を３個同時に投げて，表が出た銅貨の個数を X とする．X の分布関数を求め，そのグラフを描け．

問題４ X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする．$\boldsymbol{B}_1$ を１次元ボレル集合体とし，$A \in \boldsymbol{B}_1$ に対して

$$
\begin{aligned}
&X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}, \\
&\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))
\end{aligned}
$$

と定義する．

(1) $A_1, A_2 \in \boldsymbol{B}_1$，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば $X^{-1}(A_1) \cap X^{-1}(A_2) = \emptyset$ であることを示せ．

(2) $A_n \in \boldsymbol{B}_1$，$(n = 1, 2, \cdots)$，$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$ ならば次が成り立つことを示せ．

$$
\mathrm{P}_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_X(A_n)
$$