確率・統計 A 中間試験問題 解答

問題 1. (1) $\mathcal{B}$ は、ある集合 Ω の部分集合の集まりで次の条件 (B1),(B2),(B3) をみたす。

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$,

(B2) $A \in B \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$,

(B3) $A_1, A_2, \cdots, \in \mathcal{B} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

(2) $A, B \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{B}, A \cap B \in \mathcal{B}$ を示せばよい。

$A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset\ (n = 3, 4, \cdots)$ とおくと、(B1),(B2) より $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{B}$

したがって (B3) より $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

この結果と、(B2)、ドモルガンの法則より

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{B}$

問題 2. (1) P は $\mathcal{B}$ 上で定義された実数値関数で次の条件 (P1), (P2), (P3) を満たす。

(P1) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

(P2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

(P3) P は完全加法的である. すなわち,

$A_1, A_2, \cdots, \in \mathcal{B}$ で、 $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$ ならば

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

(2) まず、有限加法性を示す。

$A, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset$ のとき、$A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset$ $(n \geq 3)$ とおくと

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{P}(\emptyset)$

となるが、左辺 ≤ 1 となることから、$\mathrm{P}(\emptyset) = 0$。

したがって $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

$(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$ より

$0 = \mathrm{P}\big((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\big) = \mathrm{P}(A \cap B^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B)$ したがって、

$\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A^c \cap B) = 0$

有限加法性より

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A \cap B)$,

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)$

問題 3. (1) $X^{-1}(A^c) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A^c\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \notin A\} = \bigl(X^{-1}(A)\bigr)^c$

$1 = \mathrm{P}\Bigl(\bigl(X^{-1}(A)\bigr)^c\Bigr) + \mathrm{P}\bigl(X^{-1}(A)\bigr) = \mathrm{P}_X(A^c) + \mathrm{P}_X(A)$。

(2) $\omega \in X^{-1}(A \cup B) \Rightarrow \omega \in X^{-1}(A)$ または $\omega \in X^{-1}(B)$

したがって、$X(\omega) \in A$ または $X(\omega) \in B$ となり $\omega \in X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$

したがって

$\mathrm{P}_X(A \cup B) = \mathrm{P}(X^{-1}(A \cup B)) \le \mathrm{P}(X^{-1}(A)) + \mathrm{P}(X^{-1}(B)) = \mathrm{P}_X(A) + \mathrm{P}_X(B)$

問題 4. 標本点は、表を H, 裏を T で表すと、HH, HT, TH, TT となり、
$\mathrm{P}(\{HH\}) = \frac{p}{2},\ \mathrm{P}(\{HT\}) = \frac{p}{2},\ \mathrm{P}(\{TH\}) = p(1-p),\ \mathrm{P}(\{TT\}) = (1-p)^2$
$0 < p < 1$ とする。

(1) ２回目に表であったときに、１回目が表である条件付確率は

$$\frac{\mathrm{P}(\{HH\})}{\mathrm{P}(\{HH,TH\})} = \frac{p}{2}\left\{\frac{p}{2} + p(1-p)\right\}^{-1} = \frac{1}{3-2p}$$

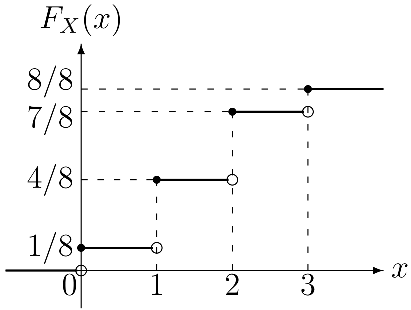
(2) 独立であることの定義は

$$\mathrm{P}(\{TH,TT\})\mathrm{P}(\{HT,TT\}) = \mathrm{P}(\{TT\})$$
$$(1-p)\{\frac{p}{2} + (1-p)^2\} = (1-p)^2$$
$$(1-p)p(p-\frac{1}{2}) = 0$$

となり、$0 < p < 1$ より、独立となるための必要十分条件は、$p = \frac{1}{2}$

問題 5. X のとり得る値は $0,1,2,3$ で、その確率はそれぞれ、$1/8, 3/8, 3/8, 1/8$.

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{8} & (0 \le x < 1) \\ \mathrm{P}(X \in \{0,1\}) = \frac{4}{8} & (1 \le x < 2) \\ \mathrm{P}(X \in \{0,1,2\}) = \frac{7}{8} & (2 \le x < 3) \\ \mathrm{P}(X \in \{0,1,2,3\}) = \frac{8}{8} & (3 \le x) \end{cases}$$



問題 6. $x < y$ とする。$A = \{\omega; X(\omega) \le x\}, B = \{\omega; x < X(\omega) \le y\}$ とおくと、$A \cap B = \emptyset$ であるから

$$F_X(y) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = F_X(x) + \mathrm{P}(B) \ge F_X(x) \ (\because \mathrm{P}(B) \ge 0)$$