確率・統計 A 期末試験

平成１５年７月２９日

1.　X, Y は互いに独立な連続型確率変数とする．$\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$ がともに有限の値であるとき，$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ であることを，期待値と分散，共分散の定義のみを用いて表せ．

2.　２次元離散型確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ と $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ は独立で，

$$P\{\boldsymbol{X} = (i,j)\} = P\{\boldsymbol{Y} = (i,j)\} = p_{ij} \quad (i = 0, 1; j = 0, 1)$$
$$p_{00} + p_{01} = p_{10} + p_{11} = \frac{1}{2}$$

を満たすとする．$Z_1 = X_1 + Y_1, Z_2 = X_2 + Y_2$ とおく．p_{00} の値を a とするとき，以下の問に答えよ．

(1) X_1 の周辺確率関数を a を用いて表せ．

(2) Z_1 の期待値を求めよ．

(3) $q_{ij} = P(Z_1 = i, Z_2 = j)\,(i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2)$ とするとき，q_{ij} を (i, j)-成分とする行列 $Q = (q_{ij})$ を a で表せ．

(4) $Z_2 = 1$ が与えられたときの Z_1 の条件付き確率関数を a を用いて表せ．

(5) Z_1 と Z_2 が独立となるような a の値を求めよ．

3.　C を実数，$a \geq 0$ とし，(X, Y) は，次で定義される確率密度関数 $f(x, y)$ をもつ２次元連続型確率変数であるとする．

$$f(x,y) = \begin{cases} C(1+ay)e^{-x-y-axy} & (x > 0, y > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) C の値を求めよ．

(2) Y の周辺確率密度関数を求めよ．

(3) $Y = 1$ が与えられたときの X の条件付き期待値を求めよ．

(4) X, Y が独立となるような a の値を求めよ．

(5) $X = x$ が与えられたときの Y^2 の条件付き期待値を $g(x)$ と表すとき，$E[g(X)]$ を求めよ．