平行移動で不変な確率の定義域を制限せざるを得ない例

Step 1 標本空間を $[0,1)$ とする.

Step 2 平行移動を定義する.

$$[0,1)\times\mathbf{R}\to[0,1)$$
$$(x,r)\mapsto x\oplus r:=x+r-k$$
（ ただし $k=[x+r]$, ガウス記号, x+r を超えない最大整数 ）
$$A\oplus r:=\{x\oplus r|x\in A\}$$

Step 3 $[0,1)$ のどの点も同様に確からしい確率を定義したい.

$\Rightarrow$ 平行移動で不変：$\forall A\subset[0,1),\ \forall r\in\mathbb{R},\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\oplus r)$

Step 4 同値関係の定義と同値類への分割

$x\sim y\ \Leftrightarrow x-y\in\mathbf{Q}$

によって $[0,1)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A(\lambda)$ と分割する.

ただし, $A(\lambda)$ は λ の同値類, $\lambda\neq\lambda'\Rightarrow A(\lambda)\cap A(\lambda')=\emptyset$,

Λ は代表元からなる集合 (選択公理).

Step 5 $\mathbf{Q}_0=[0,1)\cap\mathbf{Q}$ とすると $[0,1)=\bigcup_{q\in\mathbf{Q}_0}(\Lambda\oplus q)$ が成り立つ.

このとき $q\neq q'\Rightarrow(\Lambda\oplus q)\cap(\Lambda\oplus q')=\emptyset$

Step 6 平行移動で不変な確率 P が存在したと仮定すると

$$\mathrm{P}([0,1))=\sum_{q\in\mathbf{Q}_0}\mathrm{P}(\Lambda\oplus q)=\sum_{q\in\mathbf{Q}_0}\mathrm{P}(\Lambda)$$

となり, $\mathrm{P}(\Lambda)=0$ としても, $\mathrm{P}(\Lambda)>0$ としても, $\mathrm{P}([0,1))=1$ に矛盾する.