確率・統計A　レポート　の解答

A4の用紙に，番号，氏名，提出日，問題の解答を書いて，

7月20日(火)

までに，数学事務室カウンター横の指定のボックスに提出すること.

問題1. (1) Ω を集合とする. $\mathcal{B}$ が Ω 上の σ–集合体であることの定義を書け.
(解答) 略（テキスト参照）

(2) $(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間とする. P が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度であることの定義を書け.
(解答) 略（テキスト参照）

問題2. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とする. 問題1で書いた定義のみを用いて次を示せ.

(以下の解答で, (B1),(B2),(B3) はテキストの定義 1.1, (P1),(P2),(P3) はテキストの定義1.2 の条件を表す)

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$
(解答) (B1),(B2) より $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{B}$

(2) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$
(解答) $A_1 = A, A_2 = B, A_j = \emptyset (j \geq 3)$ と定義すると (1) と (B3) より
$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_j$

(3) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$
(解答) (2) と (B2) より $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{B}$

(4) $A, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset$ ならば $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ であることを示せ.
(解答) $A_1 = A, A_2 = B, A_j = \emptyset (j \geq 3)$ と定義すると
$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$
したがって (P3) より
$\mathrm{P}(A \cup B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{P}(\emptyset)$
(P1) より 左辺は有限値であり, $\mathrm{P}(\emptyset) \geq 0$ であるので
等式が成り立つためには $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ でなければならない.
したがって, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

(5) $A, B \in \mathcal{B}, A \supset B$ ならば $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$ であることを示せ.
(解答) $A_1 = A \cap B^c, A_2 = B$ とおくと $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. したがって (4) より
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A \cap B^c) + \mathrm{P}(B)$.

問題 3. ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ の有界な開区間の全体からなる集合族を J, 有界な閉区間全体からなる集合族を K と表す：

$$J = \{(a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\}, \quad K = \{[a,b] \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

集合族 A を含む最小の σ–集合体を $\sigma[A]$ と表す.

(1) $[a,b] \in \sigma[J]$ であることを示せ.
(解答) まず $\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) = [a,b]$ を示す.
$\forall n\ (a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) \supset [a,b]$ なので "$\supset$" は明らか.
$x < a$ とすると $\exists n\ x < a - \frac{1}{n}$ より $x \notin$ 左辺
$x > b$ とすると $\exists n\ x > a + \frac{1}{n}$ より $x \notin$ 左辺
したがって, $x \notin [a,b]$ ならば $x \notin$ 左辺
$\sigma[J]$ は σ–集合体であり, すべての有界な開区間を含むので
$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) \in \sigma[J]$

(2) $(a,b) \in \sigma[K]$ であることを示せ.
(解答) まず $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] = (a,b)$ を示す.
$\forall n\ [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \subset (a,b)$ なので "$\subset$" は明らか.
$a < x < b$ とすると $\exists n\ a+\frac{1}{n} < x < b - \frac{1}{n}$ より $x \in$ 左辺
$\sigma[K]$ は σ–集合体であり, すべての有界な閉区間を含むので
$(a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \in \sigma[K]$

(3) $\sigma[J] = \sigma[K]$ であること示せ.

問題 4. 事象 A, B は $\mathrm{P}(A) > 0, 0 < \mathrm{P}(B) < 1$ を満たすとする.
$p = \mathrm{P}(B), q = \mathrm{P}(A|B), r = \mathrm{P}(A|B^c)$ とおく.

(1) $\mathrm{P}(B|A)$ を p, q, r を用いて表せ.
(解答)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A\cap B) + \mathrm{P}(A\cap B^c)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A|B^c)\mathrm{P}(B^c)} = \frac{qp}{qp + r(1-p)}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ であるための必要十分条件は $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A|B^c)$ であることを証明せよ.
(解答)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B) &\Leftrightarrow \frac{qp}{qp + r(1-p)} > p \\ &\Leftrightarrow q > qp + r(1-p) \\ &\Leftrightarrow q(1-p) > r(1-p) \\ &\Leftrightarrow q > r\end{aligned}$$

問題5. 事象 A, B, C が独立であるとき,
A と $B \cap C^c$ も独立であることを証明せよ.

(解答) テキスト定理1.9 より A, B, C^c も独立である.

したがって $\mathrm{P}(A \cap B \cap C^c) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^c)$

一方, B, C^c も独立であるから $\mathrm{P}(B \cap C^c) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^c)$

よって $\mathrm{P}(A \cap (B \cap C^c)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \cap C^c)$ となり A と $B \cap C^c$ は独立

問題6. X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された確率変数, $\mathbb{B}_1$ をボレル集合体とする.

(1) $A_n \in \mathbb{B}_1 (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき $X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)$ を証明せよ.

(解答)

$$\begin{aligned}
\omega \in X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &\Leftrightarrow X(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\
&\Leftrightarrow \exists n \ X(\omega) \in A_n \\
&\Leftrightarrow \exists n \ \omega \in X^{-1}(A_n) \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)
\end{aligned}$$

(2) $A \in \mathbb{B}_1$ に対して, $\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))$ と定義する. P_X は $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}_1)$ 上の確率測度であることを証明せよ.

(解答) まず $A, B \in \mathbb{B}_1$ に対して $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$ を示す.

$$\begin{aligned}
\omega \in X^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow X(\omega) \in A \cap B \\
&\Leftrightarrow X(\omega) \in A \text{ かつ } X(\omega) \in B \\
&\Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(A) \text{ かつ } \omega \in X^{-1}(B) \\
&\Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)
\end{aligned}$$

すると

$\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}^1) = X^{-1}(A \cup A^c) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(A^c)$

で, かつ,

$X^{-1}(A) \cap X^{-1}(A^c) = X^{-1}(A \cap A^c) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

であるから

$X^{-1}(A^c) = \{X^{-1}(A)\}^c$ となる.

(P1) $\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A)) \in [0, 1]$

(P2) $\mathrm{P}(X)(\mathbb{R}) = \mathrm{P}(X^{-1}(\mathbb{R}^1)) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$

(P3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{B}_1, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mathrm{P}(X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) \\
&= \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X^{-1}(A_n)) \ (\because\ X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) = \emptyset \ (i \neq j)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_X(A_n)
\end{aligned}
$$

問題 7. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする.

(1) $\{A_n\}$ が単調減少列であるとき $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ であること示せ.

(解答) (2) が示されれば $\{A_n^c\}$ は単調増加列なので

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n^c) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \mathrm{P}\Big((\bigcap_{n=1}^{n} A_n)^c\Big) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{n} A_n)
$$

したがって

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n^c) = \mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)
$$

(2) $\{A_n\}$ が単調増加列であるとき $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ であること示せ.

(解答) $B_1 = A_1, B_{n+1} = A_{n+1} \cap A_n^c$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と定義すると
$A_n = \bigcup_{n=1}^{k} B_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$
で, かつ, $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. したがって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_n) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(B_n) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{k} B_n) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}(A_k)
\end{aligned}
$$

問題 8. 確率変数 X の分布関数を F とおく.

(1) $\mathrm{P}(X < a) = \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$ であることを証明せよ.

(解答) $A_n = (-\infty, a - \frac{1}{n}]$ と定義すると $\{A_n\}$ は単調増加列であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n}) &= \lim_{n\to\infty} P_X(A_n) \\
&= \mathrm{P}_X\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(A_n)\Big) = \mathrm{P}_X((-\infty, a)) = \mathrm{P}(X < a)
\end{aligned}
$$

(2) $\mathrm{P}(X=a) = F(a) - \lim_{n\to\infty} F(a-\frac{1}{n})$ であることを示せ.

(解答) $F(a) = \mathrm{P}(X < a$ または $X = x) = \mathrm{P}(X < a) + \mathrm{P}(X = a)$

であるから (1) より

$\mathrm{P}(X=a) = F(a) - \lim_{n\to\infty} F(a-\frac{1}{n})$