確率・統計A　れポート

平成 22 年６月２９日

A4 の用紙に，番号，氏名，提出日，問題の解答を書いて，

7 月 20 日 (火)

までに，数学事務室カウンター横の指定のボックスに提出すること．

問題 1. (1) Ω を集合とする．$\mathcal{B}$ が Ω 上の σ–集合体であることの定義を書け．

(2) $(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間とする．P が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度であることの定義を書け．

問題 2. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とする．問題 1 で書いた定義のみを用いて次を示せ．

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$

(2) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$

(3) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$

(4) $A, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset$ ならば $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ であることを示せ．

(5) $A, B \in \mathcal{B}, A \supset B$ ならば $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$ であることを示せ．

問題 3. ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ の有界な開区間の全体からなる集合族を J, 有界な閉区間全体からなる集合族を K と表す：

$$J = \{(a, b) \mid -\infty < a < b < \infty\}, \quad K = \{[a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

集合族 A を含む最小の σ–集合体を $\sigma[A]$ と表す．

(1) $[a, b] \in \sigma[J]$ であることを示せ．

(2) $(a, b) \in \sigma[K]$ であることを示せ．

(3) $\sigma[J] = \sigma[K]$ であること示せ．

問題 4. 事象 A, B は $\mathrm{P}(A) > 0, 0 < \mathrm{P}(B) < 1$ を満たすとする．
$p = \mathrm{P}(B), q = \mathrm{P}(A|B), r = \mathrm{P}(A|B^c)$ とおく．

(1) $\mathrm{P}(B|A)$ を p, q, r を用いて表せ．

(2) $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ であるための必要十分条件は $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A|B^c)$ であることを証明せよ．

問題 5. 事象 A, B, C が独立であるとき，
A と $B \cap C^c$ も独立であることを証明せよ．

問題 6. X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された確率変数, $\mathbb{B}_1$ をボレル集合体とする.

(1) $A_n \in \mathbb{B}_1 (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき $X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)$ を証明せよ.

(2) $A \in \mathbb{B}_1$ に対して, $\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))$ と定義する. P_X は $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}_1)$ 上の確率測度であることを証明せよ.

問題 7. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする.

(1) $\{A_n\}$ が単調減少列であるとき $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ であること示せ.

(2) $\{A_n\}$ が単調増加列であるとき $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ であること示せ.

問題 8. 確率変数 X の分布関数を F とおく.

(1) $\mathrm{P}(X < a) = \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$ であることを証明せよ.

(2) $\mathrm{P}(X = a) = F(a) - \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$ であることを示せ.