

# 確率統計 A

## 第 1 章 事象と確率 (Part 1)

(2012 年 4 月 10 日)

講師: 若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12>

確率統計 A, 2012年4月10日: P.1

### 講義の予定

- |                                                 |                                        |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 第1週: 4月10日「1.1 不確実性へのアプローチ」「1.2 古典的確率」「1.3 事象族」 | 第8週: 5月29日「2.5.2 2次元の場合」「2.5.3 多次元の場合」 |
| 第2週: 4月17日「1.4 確率」                              | 第9週: 6月5日「3.1 平均の定義」「3.2 基本的性質」        |
| 第3週: 4月24日「1.5 確率空間の構成」「1.6 条件付き確率」             | 第10週: 6月12日「3.3 特性量」                   |
| 第4週: 5月1日「1.7 事象の独立」                            | 第11週: 6月19日「中間試験」                      |
| 第5週: 5月8日「2.1 確率変数の定義」「2.2 分布関数」                | 第12週: 6月26日「3.4 条件付き分布と平均」             |
| 第6週: 5月15日「2.3 多次元確率ベクトルと分布」「2.4 確率変数の独立性」      | 第13週: 7月3日(休講)                         |
| 第7週: 5月22日「2.5 離散型・連続型分布 2.5.1 1次元の場合」          | 第14週: 7月10日「4.1 特性関数とモーメント」            |
|                                                 | 第15週: 7月24日「4.2 分布と特性関数」               |
|                                                 | 第16週: 7月31日「期末試験」                      |

確率統計 A, 2012年4月10日: P.2

### 注意

- 授業の進度により, 内容が変更されることがある.
- 質問等があれば C810に直接来るか, wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp にメールすること. 質問に来る場合は, メールまたは電話 (082-424-7359) であらかじめ連絡をとってもらえると確実.
- 配布した資料は <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12> にアップするので, 受け取っていないものはダウンロードしておくこと.
- 成績は, 中間&期末テスト, 出席状況を総合して評価する.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.3

## 1.1. 不確実性へのアプローチ

確率統計 A, 2012年4月10日: P.4

### 不確実性

我々はあらゆる場面で不確実性に直面している.

1. ある時刻からある時刻までに 1mm 以上の雨が降るか.
2. ある銘柄の 1 週間後の株価はどのようになるか.
3. ある病気にはどんな遺伝子が関係しているか.
4. 新たに開発された新薬はこれまでのものに比べて効果があるか.
5. ある作者不詳の作品について, 作者を知りたい.
6. ある工場で作製されている製品の不良率はどの程度か.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.5

### 不確実性の原因

1. 情報の欠如のため.
2. 入手可能な情報の不正確さのため.
3. 必要とする情報を取り出す方法がないため.
4. 必要な測定を行うことができないため.
5. **不確実性が本質的に備わっているため.**  
⇒ 不確実性を数量化する (統計学).  
不確実性を確率によって表現する.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.6

## 1.2. 古典的確率

確率統計 A, 2012年4月10日: P.7

### 定義と表記

試行: 不確実性を伴う実験や調査.

標本点 (Sample Point): 試行によって起こりうる個々の結果.

**標本空間 (Sample Space)**  $\Omega$ : 標本点全体からなる集合.

**事象 (Event)**:  $\Omega$  の部分集合.

事象  $A$  が起こる: 試行の結果, 事象  $A$  に含まれる標本点のどれかが起こる

$A \cap B$ : 積事象,  $A \cup B$ : 和事象,  $A^c$ : 余事象,  $\emptyset$ : 空事象.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.8

### Example 1.1

サイコロを1回振る試行において, 標本空間および「偶数の目が出る」という事象は,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}$$

と表せる. この場合  $\Omega$  の部分集合は全部で  $2^6$  個ある.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.9

### Example 1.2

銅貨を  $n$  回投げる試行において, 標本空間および「第1回目と第2回目に続けて表が出る」という事象は

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n); \omega_i = 0 \text{ または } 1, i = 1, \dots, n\}$$

$$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n); (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega, \omega_1 = \omega_2 = 1\}$$

で表せる. この場合, 標本点の個数は  $N = 2^n$  個である. 従って,  $\Omega$  の部分集合は全部で  $2^N$  個ある.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.10

### 古典的確率

標本空間  $\Omega$  が有限個の点からなる集合で, 起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき,  $\Omega$  の部分集合の全体を  $\wp(\Omega)$  とし,  $\wp(\Omega)$  の各要素  $A$  についてその確率を

$$P(A) = \frac{A \text{ の要素の数}}{\Omega \text{ の要素の数}}$$

として定める. 以下集合  $A$  の要素の数を  $\#(A)$  で表す.

ex 1.3) Example 1.1 では  $P(A) = \frac{1}{6} \#A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ex 1.4) Example 1.2 では  $P(A) = \frac{1}{2^n} \#(A) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$

確率統計 A, 2012年4月10日: P.11

### 確率の公理

古典的確率  $P(A)$  は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の  $A \in \wp(\Omega)$  に対して  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

(P2)  $P(\Omega) = 1$ .

(P3') (有限加法性)  $A_i \in \wp(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  
 $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) ならば

$$P \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

確率統計 A, 2012年4月10日: P.12

### 1.3. 事象族

確率統計 A, 2012年4月10日: P.13

#### $\sigma$ -集合体

定義 1.1. 標本空間  $\Omega$  の部分集合の集まり  $\mathcal{B}$  で次の (B1), (B2), (B3) を満たすものを  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体 ( $\sigma$ -field) または  $\sigma$ -加法族という.

$$(B1) \Omega \in \mathcal{B}$$

$$(B2) A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$$

$$(B3) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$$

確率統計 A, 2012年4月10日: P.14

#### $\sigma$ -集合体の例

1.  $\mathcal{N}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$
2.  $\sigma[A] = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$
3.  $\wp(\Omega)$

確率統計 A, 2012年4月10日: P.15

#### 集合体

注 1.1. 標本空間  $\Omega$  の部分集合の集まり  $\mathcal{B}$  で次の (B1), (B2), (B3') ((B3) の条件を緩めたもの) を満たすものを **集合体** という.

$$(B1) \Omega \in \mathcal{B}$$

$$(B2) A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$$

$$(B3') A_1, A_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$$

確率統計 A, 2012年4月10日: P.16

#### $\sigma$ -集合体の性質

1.  $\sigma$ -集合体は集合体である.
2. 有限個の要素からなる集合体は  $\sigma$ -集合体である.
3.  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  が  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体ならば  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$  も  $\sigma$ -集合体である.
4.  $\{\mathcal{B}_j\}_{j \in J}$  を  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体の集まりとする. このとき,  $\bigcap_{j \in J} \mathcal{B}_j$  も  $\sigma$ -集合体である.
5.  $\mathcal{A}$  を  $\Omega$  上の集合族とする. このとき  $\mathcal{A}$  を含む最小な  $\sigma$ -集合体  $\sigma[\mathcal{A}]$  が存在する.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.17

#### 上極限集合と下極限集合 (1/2)

集合列  $\{A_n\}$  に対して, 集合  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  および  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$  をそれぞれ  $\{A_n\}$  の上極限集合および下極限集合と呼び,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  と表す. 一般に  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_k \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ . 特に  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k$  で表す.

上極限集合: 無限個の  $n$  について事象  $A_n$  が起こること.

下極限集合: ある番号から先すべての  $n$  について事象  $A_n$  が起こること.

確率統計 A, 2012年4月10日: P.18

## 上極限集合と下極限集合 (2/2)

上極限集合: 無限個の  $n$  について事象  $A_n$  が起こること.

下極限集合: ある番号から先すべての  $n$  について事象  $A_n$  が起こること.

ex) 銅貨を無限回投げたとき  $n$  回目に表が出る事象

$A_n = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega, \omega_n = 1\}$  を考える.

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{k\text{回目に表が出る}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{n\text{回目以降に表が出る}\} \\ &= \{1\text{が無限回出る}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{k\text{回目に表が出る}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\text{回目以降表が出続ける}\} \\ &= \{\text{ある回数以降表が出続ける}\}\end{aligned}$$

確率統計 A, 2012年4月10日: P.19

## 定理 1.1

定理 1.1.  $\mathcal{B}$  を  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体とする. このとき

(1)  $\emptyset \in \mathcal{B}$ ,

(2)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}$ ,

(3)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$ ,

(4)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{B}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{B}$ .

確率統計 A, 2012年4月10日: P.20

## 定理 1.1 の証明

確率統計 A, 2012年4月10日: P.21