確率統計 A

第 1 章 事象と確率 (Part 3)

(2012 年 4 月 24 日)

講師:若木宏文

E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12

1.5. 確率空間の構成

標本点が有限個の場合

Ω が有限集合で, $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ とする. 標本点 ω_i の起こる確率が

$$\mathrm{P}(\{\omega_i\})=p_i,\ i=1,\ldots,n$$

であって, $p_1+\cdots+p_n=1$ とする. このとき, 事象 $A\subset\Omega$ の確率を

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{\omega_i\in A}p_i,\ A\in\wp(\Omega)$$

として定める. このとき, P は $\wp(\Omega)$ 上の有限加法的確率である. Ω が有限集合なので, P は確率の公理を満している.

標本空間が可算集合の場合

定理 1.5. Ω が可算集合で, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ とし, $\{p_1,p_2,\ldots\}$ は

$$p_i\geq 0\ (i=1,2,\ldots),\ \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$$

を満たすものとする. このとき, 標本点 ω_i の起こる確率を $\mathrm{P}(\{\omega_i\})=p_i\ (i=1,2,\ldots)$ とし, さらに

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{\omega_i\in A}p_i,\ A\in\wp(\Omega)$$

と定義する. このように定義された P は $\mathcal{B}=\wp(\Omega)$ 上の集合関数として, (P1), (P2), (P3') および完全加法性 (P3) を満たしている.

注意

標本空間 Ω が実数全体, あるいは, 銅貨を無限回なげるような場合, **すべての集合に確率の公理を満たすように確率 P を定義するのが困難**.

⇨ **基本的な事象の集まり M を定め, これらの事象を含む最小なσ-集合体を考える**.

⇨ このような σ-集合体の存在は次の定理 1.6 で保証される.

定理 1.6

定理 1.6. M を Ω の任意の部分集合族とする. このとき M を含む最小な σ-集合体が一意的に存在する. これを $\sigma[M]$ と書き, M から生成される Ω 上の σ-集合体という.

[証明]

$\mathcal{M}=\{\mathcal{B}\}$ を M を含む σ-集合体 $\mathcal{B}$ の全体とする.

$$\mathcal{B}_0=\bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}}\mathcal{B}$$

と定義すると, $M\subset\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_0\in\mathcal{M}$は明らか. $^\forall\mathcal{B}\in\mathcal{M}$に対して $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}$であるので, $\mathcal{B}_0$は M を含む最小のσ-集合体である.

ボレル集合

$\Omega=\mathbb{R}=(-\infty,\ \infty)$ で,

$M=J_1=\ \{(a,\ b]:\ -\infty<a<b<\infty\}$

のとき, $\sigma[J_1]=\mathbb{B}_1$ と書き, これを **1 次元ボレル集合体**という. ボレル集合体に属する集合を**ボレル集合**という.

よく用いられる集合; $(a,\ b)$, $[a,\ b]$, $[a,\ b)$, $(-\infty,\ b]$, $(-\infty,\ b)$, $[a,\ \infty)$, $(a,\ \infty)$, $\{a\}$, 開集合, 閉集合, 等はすべてボレル集合. これらがボレル集合であることは, 例えば

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-n^{-1}],\ [a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-n^{-1},b]$$

と表すことによって示される.

確率と積分

$(\mathbb{R},\ \mathbb{B}_1)$ 上の確率 P は, 多くの場合, 次の (1), (2) をみたす関数 $f(x)$ の積分として定義される.

1. すべての x に対して $f(x)\geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

すなわち, 任意の $a,\ b\ (a\leq b)\in\mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{P}((a,b])=\int_a^b f(x)dx$$

と定義する.

正規分布

例 1.11. (**1 次元正規分布** (**ガウス測度**)). $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ とするとき, 任意の $a,\ b\ (a\leq b)$ に対して

$$\mathrm{P}((a,b])=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_a^b \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx$$

となるような確率を, 平均 μ, 分散 σ^2 の**正規分布** (**ガウス測度**) という.

m 次元ボレル集合体:

$J_m=\ \{(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_m,b_m]:\ -\infty<a_k<b_k<\infty,\ k=1,\ldots,m\}$

とし, $\sigma[J_m]=\mathbb{B}_m$ と書き, これを **m 次元ボレル集合体**という. 一般に, 二つの可測空間 $(\Omega_1,\mathcal{B}_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{B}_2)$ が与えられたとき, 直積空間 $\Omega_1\times\Omega_2$ の部分集合族 $\{A\times B:\ A\in\mathcal{B}_1, B\in\mathcal{B}_2\}$ から生成される $\Omega_1\times\Omega_2$ 上の σ-集合体

$\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\equiv\sigma[\{A\times B:\ A\in\mathcal{B}_1,B\in\ \mathcal{B}_2\}]$

を $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ の**直積 σ-集合体**, $(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2)$ を $(\Omega_1,\mathcal{B}_1)$ と $(\Omega_2,\mathcal{B}_2)$ の**直積可測空間**という. 同様に $(\Omega_i,\mathcal{B}_i)$, $i=1,\ldots,m$ を可測空間とするとき, $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_m$上の σ-集合体

$\mathcal{B}_1\times\cdots\times\mathcal{B}_m\equiv\sigma[\{A_1\times\cdots\times A_m:\ A_i\in\mathcal{B}_i, i=1,\ldots,m\}]$

を $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_m$ の直積 σ-集合体, $(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_m,\ \mathcal{B}_1\times\cdots\times\mathcal{B}_m)$ を $(\Omega_i,\mathcal{B}_i)$, $i=1,\ldots,m$ の直積可測空間という. このとき, m 次元ボレル集合体は 1 次元ボレル集合体の直積 σ-集合体, すなわち

$\mathbb{B}_m=\ \mathbb{B}_1\times\cdots\times\mathbb{B}_1$

1.6. 条件付き確率

疑問

ある確率現象のモデル化として, 確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ が導入されているとする. この確率空間において, ある事象 B が起きたという情報が与えられたとき, 可測空間 $(\Omega,\mathcal{B})$ に対してどのような確率測度を考えればよいであろうか?

Example 1.12

(問) 1組52枚のカードから1枚のカードを抜き出す試行を考える. 抜き出されたカードがスペードであるという情報が与えられたとき, どのような確率を考えればよいか.

(答) 標本空間は $\Omega=\{s_1,\ldots,s_{13},t_1,\ldots,t_{39}\}$ とし, 抜き出されたカードがスペードであるという事象を $B=\{s_1,\ldots,s_{13}\}$ とする. このとき, 各標本点の確率を

$\mathrm{P}(\{s_i\}|B)=\mathrm{P}_B(\{s_i\})=1/13$, $\mathrm{P}(\{t_j\}|B)=\mathrm{P}_B(\{t_j\})=0$

とすればよい.

条件付き確率の定義

定義 1.3. $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ を確率空間, A, $B\in\mathcal{B}$ とし, $\mathrm{P}(B)\neq 0$ とする. このとき

$$\boxed{\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$$

を事象 B が与えられたときの事象 A の**条件付き確率** (**Conditional Probability**) という.

定理 1.7

定理1.7. $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ を確率空間とし, $B\in\mathcal{B}$ で $\mathrm{P}(B)\neq 0$ とする. B を固定し, $A\in\mathcal{B}$ に対して

$$\mathrm{P}_B(\mathrm{A})=\mathrm{P}(A|B)$$

とおく. このとき P_B は $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の確率である.

(ヒント)

$0\le \mathrm{P}_B(A)\le 1$, $\mathrm{P}_B(\Omega)=1$, $\mathrm{P}_B(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}_B(A_i)$ (ただし $A_i\cap A_j=\varnothing$) を示せばよい.

乗法公式

定義 1.3 より,

$\mathrm{P}(A_1\cap A_2)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)&=\mathrm{P}(A_1\cap A_2)\mathrm{P}(A_3|A_1\cap A_2)\\&=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1\cap A_2).\end{aligned}$$

この結果は次の乗法公式に拡張される.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\\&=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1\cap A_2)\\&\times\mathrm{P}(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)\times\cdots\times\mathrm{P}(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})\end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})>0$ とする.

Bayes の公式

定理1.8 (Bayes の公式). 事象列 $\{B_i\}$ は互いに素で, $B_i\in\mathcal{B}$, $\mathrm{P}(B_i)>0$, $i=1,2,\ldots$, かつ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\Omega$$

とする. このとき任意の $A\in\mathcal{B}$, $\mathrm{P}(A)>0$ に対して,

$$\mathrm{P}(B_i\mid A)=\frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A\mid B_j)}$$

定理1.8の証明

Bayes の公式の解釈 (1/2)

試行の結果, $B_1, B_2, \ldots$ のいずれかが起こり, その影響で事象 A が起こったとする.

- 事前 : 事象 A が起こる前のこと.
- 事後:事象 A が起こった後のこと.
- $\mathrm{P}(B_i)$:事前確率(事象B_iに対して$\mathrm{P}(B_i)$は事象 A が起こる前に与えられている確率であるから).
- $\mathrm{P}(B_i|A)$:事後確率(事象Aが起こった後で与えられる確率であるから).

Bayesの公式は, 事後確率は事前確率を用いて表されることを示している.

Bayes の公式の解釈 (2/2)

(別解釈) 2 段階実験において, 第 1 段階実験により事象 $B_1, B_2, \ldots$ のいずれかが起こり, 第 2 段階実験により事象 A が起こるとする. このとき, 第 2 段階に事象 A が起こったとき, 第 1 段階で事象 B_i が起こっていたという条件確率 $\mathrm{P}(B_i|A)$ を求める公式が Bayesの公式である.

注意 1.5

定理 1.8 において $B_{n+1} = B_{n+2} = \cdots = \varnothing$ とおくと, 原因事象が有限個の Bayes の公式

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A \mid B_j)}$$

を得る.

Example 1.13

各々2つの引き出しがついた箱が3つある. 箱1の引出しには両方とも金のコインが入っており, 箱2には, 一方の引き出しに金のコイン・他方の引き出しに銀のコインが入っており, 箱3の引き出しには両方とも銀のコインが入っているものとする. 箱をランダムに選び, 引出しをあけたところ金のコインが入っていた. この箱の他方の引き出しに金のコインが入っている確率を求めよ.

Example 1.13 の解答