

確率統計 A

第 4 章 特性関数 (Part 1)

(2012 年 7 月 10 日)

- 講師: 若木宏文
- E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
- Web: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/>

確率統計 A, 2012年7月10日: P.1

4.1. 特性関数とモーメント

確率統計 A, 2012年7月10日: P.2

何故特性関数が必要か

- **特性関数**は確率密度関数のフーリエ変換 (Fourier Transform) として定義される.
- 確率変数 X の特性関数と分布は一対一対応をしている.
- 特性関数がわかれば X の分布がわかる.

ex) $X_1, \dots, X_n \sim i.i.d. N(\mu, \sigma^2)$ のとき

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \left(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \text{ の分布は?}$$

i.i.d. は 'Independently and Identically Distributed' の略記で $\sim i.i.d.$ で独立に同一の分布に従うという意味となる.

確率統計 A, 2012年7月10日: P.3

定義 4.1

確率変数 X の分布を P_X とする. $f(x)$ を, P_X が連続型のときは確率密度関数, 離散型のときは確率関数を表すとする. \mathbb{R} 上で定義された関数

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{itx} f(x) & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx & \text{連続型} \end{cases}$$

を X の特性関数という (確率密度関数 f のフーリエ変換).

確率統計 A, 2012年7月10日: P.4

Example 4.1

二項分布, ポアソン分布, 一様分布, 正規分布の特性関数は, 次のように与えられる.

(二項分布) $X \sim B(n, p) \Rightarrow \varphi_X(t) = \{1 + p(e^{it} - 1)\}^n$.

(ポアソン分布) $X \sim p(\lambda) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$.

(一様分布) $X \sim U(0, 1) \Rightarrow \varphi_X(t) = (e^{it} - 1) / it$.

(正規分布) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \varphi_X(t) = \exp(it\mu - \sigma^2 t^2 / 2)$.

確率統計 A, 2012年7月10日: P.5

Ex 4.1 の導出法 (正規分布, 二項分布)

確率統計 A, 2012年7月10日: P.6

定理 4.1

- (1) $\varphi_X(0)=1$.
- (2) $|\varphi_X(t)|\leq 1$.
- (3) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.
- (4) $\varphi_{cX+d}(t)=e^{itd}\varphi_X(ct)$.
- (5) $E(|X|^n)<\infty$ であれば $\varphi_X(t)$ は C^n クラス (連続な n 次導関数が存在) で,

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \right|_{t=0} = i^n E(X^n).$$

確率統計 A, 2012年7月10日: P.7

定理4.1 の証明

確率統計 A, 2012年7月10日: P.8

Example 4.2

特性関数が得られているとすると, 各分布の平均, 分散等を定理 4.1 (5) を利用して簡単に求めることができる. 例えば, 正規分布の場合,

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき,

$$E[(X - \mu)^k] = \begin{cases} 0 & (k \text{ が奇数}) \\ 1 \times 3 \times \dots \times (k-1) \times \sigma^k & (k \text{ が偶数}) \end{cases}$$

確率統計 A, 2012年7月10日: P.9

Example 4.2 の証明

確率統計 A, 2012年7月10日: P.10

定義 4.2

$p=1$ のときは定義4.1と一致する.

(多次元分布の特性関数) X を p 次元確率変数, $t \in \mathbb{R}^p$ とし,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix},$$

とする. このとき

$$\varphi_X(\mathbf{t}) = E[\exp(it'X)] = E\left[\prod_{j=1}^p \exp(it_j X_j)\right],$$

を X の特性関数という.

ex 4.3) $X \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow \varphi_X(\mathbf{t}) = \exp(it'\mu - t'\Sigma t/2)$.

確率統計 A, 2012年7月10日: P.11

Ex 4.3 の導出

確率統計 A, 2012年7月10日: P.12

定義 4.2 のおまけ 1

(多次元確率変数の関数として表されている確率変数の特性関数) $X=(X_1, \dots, X_p)'$ を p 次元確率変数とし, $S(X)$ を X で構成される確率変数とする. このとき, X の同時密度関数を $f(x)$ とし, $t \in \mathbb{R}$ とすると, $S(X)$ の特性関数は,

$$\varphi_S(t) = \begin{cases} \sum_x e^{its(x)} f(x) & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{its(x)} f(x) dx & \text{連続型} \end{cases}$$

で定義される.

ex 4.4) $X_1, \dots, X_n \sim i.i.d. N(\mu, \sigma^2)$ のとき $S(X) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / \sigma$ ($\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$) の特性関数は $\varphi_S(t) = \exp(-t^2 / 2)$.

確率統計 A, 2012年7月10日: P.13

正規分布の特性

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする. 定数 $a, b (> 0)$ に対して, $Y = a + bX$ とおくと, $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ となる.
2. X_1, \dots, X_n は互いに独立で, それぞれ $X_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ であるとする. このとき, $X = (X_1, \dots, X_n)' \sim N_n(\mu, \sigma^2 I_n)$ となる. ただし, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ であり I_n は n 次の単位行列を表す.

確率統計 A, 2012年7月10日: P.14

Ex 4.4 の導出

確率統計 A, 2012年7月10日: P.15

正規分布の特性の証明

確率統計 A, 2012年7月10日: P.16

定義 4.2 のおまけ 2

(特性関数と確率変数の独立性) $X=(X_1, X_2)'$, $t=(t_1, t_2)'$ とする. このとき,

$$X_1 \text{ と } X_2 \text{ が独立} \Leftrightarrow \varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t_1) \varphi_{X_2}(t_2).$$

簡単な証明 \Rightarrow

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_1 x_1 + it_2 x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

X_1 と X_2 が独立であれば, $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ であるので,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_1 x_1 + it_2 x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_1 x_1) f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it_2 x_2) f_2(x_2) dx_2 \\ &= \varphi_{X_1}(t_1) \varphi_{X_2}(t_2). \end{aligned}$$

確率統計 A, 2012年7月10日: P.17

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ.

$$\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_p}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}} \varphi_X(t) \Big|_{t=0} = i^{n_1 + \dots + n_p} E(X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p}).$$

定理 4.1 (5) の多次元版:
 $p=1$ のときは一致する.

確率統計 A, 2012年7月10日: P.18