確率統計 A

第 4 章 特性関数 (Part 2)

(2012 年 7 月 24 日)

- 講師:若木宏文
- E-mail: wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
- Web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~wakaki/lecture/probstatA12/

何故特性関数が必要か

- **特性関数**は確率密度関数 のフーリエ変換 (Fourier Transform) として定義される.
- 確率変数 X の特性関数と分布は一対一対応をしている.
- 特性関数がわかれば X の分布がわかる.

ex) $X_1,\dots,X_n \sim i.i.d.\, N(\mu,\sigma^2)$ のとき

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\ \left(\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$ の分布は?

$i.i.d$ は 'Independently and Identically Distributed' の略記で $\sim i.i.d.$ で独立に同一の分布に従うという意味となる.

4.1. 特性関数とモーメント

定義 4.1

確率変数 X の分布を P_X とする. $f(x)$ を, P_X が連続型のときは確率密度関数, 離散型のときは確率関数を表すとする. $\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$\varphi_X(t)=\mathrm{E}(e^{itX})\quad (t\in\mathbb{R})$$

$$=\begin{cases}\sum_x e^{itx}f(x) & \text{離散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx & \text{連続型}\end{cases}$$

を X の特性関数という

(確率密度関数 f のフーリエ変換).

定義 4.2

$p=1$ のときは定義4.1と一致する.

(多次元分布の特性関数) $\boldsymbol{X}$ を p 次元確率変数, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^p$ とし,

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_p\end{pmatrix},\ \boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_p\end{pmatrix},$$

とする. このとき

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=\mathrm{E}[\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})]=\mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^{p}\exp(it_jX_j)\right],$$

を $\boldsymbol{X}$ の特性関数という.

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ.

$$\left.\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_p^{n_p}}\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}}=i^{n_1+\cdots+n_p}\mathrm{E}(X_1^{n_1}\cdots X_p^{n_p}).$$

定理 4.1 (5) の多次元版: $p=1$ のときは一致する.

4.2. 分布と特性関数

定理 4.3

(反転公式) 確率変数 X の分布関数 (df) と特性関数 (cf) をそれぞれ F_X, φ_X とする. このとき, 連続点 a, b $(a<b)$ において

$$F_X(b)-F_X(a)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt$$

が成り立つ.

(注)分布関数は$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du$であるので, 反転公式から分布の確率計算ができる.

定理 4.3 の系

(反転公式) もし

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_X(t)|\,dt<\infty$$

であれば, X は連続型であり, 確率密度関数 $f_X(x)$ が存在し,

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(y)dy$$
$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt$$

が成り立つ.

定理 4.4

(一意性定理) 確率変数 X_1,X_2 の分布を d_1, d_2 とする. またそれらの特性関数を φ_1, φ_2 とする. このとき,

$$\varphi_1=\varphi_2 \Leftrightarrow d_1=d_2.$$

注. X_1,X_2 が多次元確率ベクトルの場合にも成り立つ.

ex 4.4) $(X_1,X_2)\sim M_3(n,(p_1,p_2))$ (3項分布)
のとき, $X_1\sim B(n,p_1)$ である.

Ex 4.4 の証明

Example 4.5

再生性: 定理 4.4 とそれぞれの特性関数により以下が言える.

(二項分布) $X_1\sim B(n_1,p)$, $X_2\sim B(n_2,p)$, X_1 と X_2 は独立 $\Rightarrow$ $X_1+X_2\sim B(n_1+n_2,p)$.

(ポアソン分布) $X_1\sim p(\lambda_1)$, $X_2\sim p(\lambda_2)$, X_1 と X_2 は独立 $\Rightarrow$ $X_1+X_2\sim p(\lambda_1+\lambda_2)$.

(正規分布) $X_1\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$, $X_2\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$, X_1 と X_2 は独立 $\Rightarrow$ $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\ {\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)$.

Ex 4.5 の導出 (正規分布, 二項分布)

定理 4.4 の系

(特性関数と確率変数の独立性) $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)'$, $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2)'$ とする. このとき,

X_1 と X_2 が独立 $\Leftrightarrow \varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$.

簡単な証明

$$\Rightarrow)\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=\mathrm{E}\left\{\exp(it_1X_1)\exp(it_2X_2)\right\}$$
$$=\mathrm{E}\left\{\exp(it_1X_1)\right\}\mathrm{E}\left\{\exp(it_2X_2)\right\}$$
$$=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2).$$

$\Leftarrow)Y_1,Y_2$ は独立で, Y_1はX_1と同じ分布,Y_2はX_2と同じ分布に従う確率変数とすると,

(X_1,X_2)と(Y_1,Y_2)は同じ特性関数を持つので同じ分布. したがって, X_1,X_2は独立.

正規分布の特性

1. $X_1,\ldots,X_n$を互いに独立に$N(0,1)$に従う確率変数とすると, $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'\sim N(\boldsymbol{0},I_n)$.
2. Aをn次正則行列で $AA'=\Sigma$, $\boldsymbol{\mu}$をn次列ベクトルとすると, $\boldsymbol{Y}=A\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\mu}\sim N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$.
3. $\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$の特性関数は $\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu}\text{-}\boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t})$.
4. C を$m\times n$ 行列で, $\mathrm{rank}\,C=m$ とする. $\boldsymbol{d}$ をm次元列ベクトルとすると,
   $\boldsymbol{Z}=C\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{d}\sim N(C\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d},\ C\Sigma C')$

正規分布の特性の証明