定理　(X_1, X_2) の特性関数を $\varphi(t_1, t_2)$, X_1, X_2 の特性関数を, それぞれ $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ とすると

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2) \quad \Rightarrow \quad X_1, X_2 \text{ は独立}$$

補題　任意の分布関数 F に対して, 分布関数が F となるような確率変数 X が存在する.

証明　F は狭義単調増加とは限らず, また連続とも限らないが, (広義の意味での) 逆関数を

$$F^{-1}(y) = \min\{x;\ F(x) \geq y\}$$

と定義すると, 任意の u, x に対して

$$F^{-1}(u) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad u \leq F(x)$$

が成り立つ. $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ とし, $X = F^{-1}(U)$ とすると

$$\mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathrm{P}(U \leq F(x)) = F(x)$$

となり, Y の分布関数は $F(x)$ に一致する.

注. ここでの逆関数は, 一般に $F\{F^{-1}(y)\} \geq y$ であり等号が成り立つとは限らない.

定理の証明　U_1, U_2 を独立に一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う確率変数として

$$Y_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1), Y_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$$

と定義すると Y_1, Y_2 は独立で, それぞれの分布関数は F_{X_1}, F_{X_2} と一致する.
　Y_1, Y_2 の独立性から,

$$\varphi_{(Y_1, Y_2)}(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)$$

となり, 仮定から, $\varphi(t_1, t_2)$ と一致する. 一致の定理より (X_1, X_2) の分布と (Y_1, Y_2) の分布は一致する. 分布関数も一致するので

$$F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = F_{(Y_1, Y_2)}(x_1, x_2) = F_{Y_1}(x_1)F_{Y_2}(x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

となり, したがって X_1, X_2 は独立である.