確率・統計 A　中間試験 (追試)

平成 24 年 6 月 22 日

問題 1. $M = \{(a, b];\ -\infty < a < b < \infty\}$ とし, $\mathcal{B}$ を M を含む $\mathbb{R}$ 上の最小の σ–集合体とする. このとき, $A = \{x \in \mathbb{R};\ x - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\}$ は $\mathcal{B}$ の要素であることを証明せよ.

問題 2. 事象 A, B は $\mathrm{P}(A) > 0, 0 < \mathrm{P}(B) < 1$ であるとする. $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ ならば $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A|B^c)$ であることを証明せよ.

問題 3. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $B \in \mathcal{B}$, $\mathrm{P}(B) > 0$ とする. $\mathcal{B}$ 上の関数 P_B を

$$P_B(A) = \mathrm{P}(A|B) \quad (A \in \mathcal{B})$$

によって定義すると, P_B は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率となることを証明せよ.

問題 4. 事象 A, B について, 次の (i), (ii) が同値であることを示せ.

(i) A, B は独立

(ii) A^c, B^c は独立

問題 5. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $X(r)$ を

$$X(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

によって定義する. X が $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上の確率変数となるような, 最小の σ–集合体 $\mathcal{B}$ を求めよ.

問題 6. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とするとき, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ であることを証明せよ. (ただし, 分布関数の性質に関する定理は使ってはいけないが, 確率の性質は証明せずに使ってよい.)

問題 7. X_1, X_2 は独立で, どちらも区間 $(0, 1]$ 上の一様分布 $U(0, 1]$ に従う確率変数とする.

(1) $Y = X_1 + X_2$ の平均と分散を求めよ.

(2) $\mathrm{P}(|Y - 1| \geq k) \leq 1/(6k^2)$ であることを示せ.

(3) $Z = X_1 - X_2$ と定義するとき, (Y_1, Y_2) の同時確率密度関数を求めよ.

(4) Y, Z は独立か？ 理由とともに答えよ.