確率・統計 A　中間試験

平成 24 年 6 月 19 日

問題 1. $J = \{(a,b);\ -\infty < a < b < \infty\}$ とし, $\mathcal{B}$ を J を含む $\mathbb{R}$ 上の最小の σ–集合体とする. このとき, 無理数の全体からなる集合は, $\mathcal{B}$ の要素であることを証明せよ.

問題 2. 事象 A, B は $\mathrm{P}(A) > 0, 0 < \mathrm{P}(B) < 1$ であるとする. $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A|B^c)$ ならば $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ であることを証明せよ.

問題 3. X を 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された 1 次元確率変数とする. 1 次元ボレル集合体 $\mathbb{B}_1$ 上の関数 P_X を

$$P_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))\ (A \in \mathbb{B}_1)$$

によって定義すると, P_X は $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$ 上の確率となることを証明せよ.

問題 4. Ω を空でない集合, A を Ω の真部分集合とする. $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ とするとき, 以下に答えよ

(1) $\mathcal{B}$ は Ω の σ–集合体であることを確かめよ.

(2) P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上で定義された確率とし, X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された確率変数とする. X は離散型確率変数であることを示せ.

問題 5. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とすると $\mathrm{P}(X = a) = F(a) - \lim_{x \to a-0} F(x)$ であることを証明せよ.

問題 6. X_1, X_2 は独立で, どちらも次の確率密度関数を持つ連続型確率変数とする.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) X_1 の平均, 分散, および, X_1 と X_2 の共分散を求めよ.

(2) $k > 0$ とする. $\mathrm{P}(|X_1 - 1| \geq k) \leq 1/k^2$ であることを示せ.

(3) $Y_1 = X_1 + X_2,\ Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ と定義するとき, (Y_1, Y_2) の同時確率密度関数を求めよ.

(4) Y_1, Y_2 は独立か？ 理由とともに答えよ.