確率・統計A 練習問題（その２）

2012.7.20

1. 大小２個のサイコロを同時に振り, 大きいサイコロの目を X_1, 小さいサイコロの目を X_2 とする. $X = \max\{X_1, X_2\}$, $Y = \min\{X_1, X_2\}$ とおく.

   (1) ２次元確率変数 (X, Y) の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めよ.

   (2) X の周辺確率関数 $f_X(x)$ および X の平均 $\mathrm{E}(X)$ を求めよ.

   (3) Y の周辺確率関数 $f_Y(y)$ および Y の平均 $\mathrm{E}(Y)$ を求めよ.

   (4) $y = 1, 2, \ldots, 6$ に対し, $Y = y$ を与えたときの X の条件付き確率関数 $f_{X|Y}(x|y)$ を求めよ.

   (5) $Y = y$ を与えたときの X の条件付き平均 $\mathrm{E}(X|Y = y)$ を求めよ. この値を $g(y)$ とする.

   (6) $g(Y)$ の平均 $\mathrm{E}\{g(Y)\}$ を計算し, $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\{g(Y)\}\big(= \mathrm{E}(X|Y)\big)$ を確かめよ.

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ とおく. 連続型確率変数 (X, Y) は次の同時確率密度関数に従うとする.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cy, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A. \end{cases}$$

   (1) 定数 c の値を求めよ.

   (2) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ および X の平均 $\mathrm{E}(X)$ を求めよ.

   (3) Y の周辺確率密度関数 $f_Y(y)$ および Y の平均 $\mathrm{E}(Y)$ を求めよ.

   (4) $y \in (0, 1)$ に対し, $Y = y$ を与えたときの X の条件付き確率密度関数 $f_{X|Y}(x|y)$ を求めよ.

   (5) $Y = y$ を与えたときの X の条件付き平均 $\mathrm{E}(X|Y = y)$ を求めよ.

   (6) 関数 $g(y)$ を

$$g(y) = \begin{cases} \mathrm{E}(X|Y = y), & y \in (0, 1) \\ 0, & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

   と定義する. $g(Y)$ の平均 $\mathrm{E}\{g(Y)\}$ を計算して

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\{g(Y)\}\ \big(= \mathrm{E}\{\mathrm{E}(X|Y)\}\big)$$

   を確かめよ.

3. X, Y を独立にポアソン分布 $p(\lambda)$ に従う確率変数とする.

   (1) $W = X + Y$ とするとき, W の確率関数を求めよ.

(2) n を非負の整数とする. $W = n$ が与えられたときの X の条件付分布が 2 項分布であることを示せ.

4. X, Y を独立に $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とする.

   (1) $W = X + Y$ とするとき, W の確率密度関数を求めよ.

   (2) $W = w$ が与えられたときの X の条件付分布が正規分布であることを示せ.

5. 2 項分布 $B(n,p)$, ポアッソン分布 $p(\lambda)$, 一様分布 $U(0,1)$, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の特性関数を求めよ.

6. (1) 3 項分布 $M_3(n,(p,q))$ の特性関数を求めよ.

   (2) $(X,Y) \sim M_3(n,(p,q))$ とする. 特性関数を利用して, $\mathrm{E}(XY)$ を求めよ.

7. $X_1 + X_2$ の特性関数を求めることにより, 次を示せ.

   (1) $X_1 \sim B(m,p)$, $X_2 \sim B(n,p)$, X_1 と X_2 は互いに独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(m+n,p)$.

   (2) $X_1 \sim p(\lambda_1)$, $X_2 \sim p(\lambda_2)$, X_1 と X_2 は互いに独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   (3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1 と X_2 は互いに独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

8. (1) $(X_1, X_2) \sim M_3(m,(p,q))$, $(Y_1, Y_2) \sim M_3(n,(p,q))$ で, (X_1, X_2) と (Y_1, Y_2) が独立ならば, $(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \sim M_3(m+n,(p,q))$ であることを特性関数を使って示せ.

   (2) $\mathrm{E}(e^{it_1 X} e^{it_2 Y})$ で, $t_2 = 0$ とすると, X の特性関数が得られることを利用して, $(X,Y) \sim M_3(n,(p,q))$ のとき, $X \sim B(n,p)$ であることを示せ.