確率・統計 A 練習問題

2012.6.13.

1. 以下の集合が σ-集合体かどうかを, σ-集合体の定義に則って調べよ;

(a) $\{\phi, A, A^{\mathrm{C}}, \Omega\}$

(b) $\Omega = \{1,2,3,4\}$ としたときの, $A = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\}, \{1,2,3,4\}\}$

(c) $\Omega = \{1,2,3,4\}$ としたときの, $A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{4\}, \{1,2,3,4\}\}$

(d) $\{\Omega$の部分集合全体$\}$

(e) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots,$ を Ω 上の σ-集合体とするとき, $\mathcal{F} = \bigcap_{j\in\{1,2,\ldots\}} \mathcal{B}_j$

2. 集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ に対して, 下極限集合, 上極限集合の定義を述べよ. また, 各 A_n が Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ に属するとき, $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ の下極限集合, 上極限集合が $\mathcal{B}$ に属するかどうか調べよ.

3. 集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ に対して, $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j,\ n = 1,2,\ldots$ と定義するとき, $\{B_n\}$ の極限集合が存在し, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ に一致することを示せ.

4. 集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ に対して, $C_n = \bigcap_{j=1}^n A_j,\ n = 1,2,\ldots$ と定義するとき, $\{C_n\}$ の極限集合が存在し, $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ に一致することを示せ.

5. $M = \{(a,b];\ -\infty < a < b < \infty\}$ とし, $\mathcal{B}$ を M を含む $\mathbb{R}$ 上の最小の σ–集合体 (つまり, ボレル集合体) とする. 次の集合が, $\mathbb{R}$ に含まれることを示せ. ただし, a, b は実数値で $a < b$ とする.

$(a,b),\ [a,b],\ [a,b),\ (-\infty,a),\ (-\infty,a], (a,\infty),\ [a,\infty),\ \{a\},$
有理数の全体, 無理数の全体

6. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とする. このとき, "P が確率である" ことだけを用いて, 以下が成立することを述べよ.

(a) $^\forall A \in \mathcal{B},\ P(A^{\mathrm{C}}) = 1 - P(A)$

(b) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n A_i$

(c) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1<i_2}^n P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$

(d) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ とするとき, $\sum_{i=1}^\infty P(A_i) < \infty \Rightarrow P\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$

7. 条件付き確率の定義を述べよ. また, 条件付き確率が確率であることを示せ.

8. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $\Omega = \cup_{i=1}^n B_i$ とする. ただし, $B_i \in \mathcal{B},\ B_i \cap B_j = \emptyset\ (i \neq j = 1, \ldots, n)$ である. $A \in \mathcal{B}$, $\mathrm{P}(A) > 0$ とするとき, ベイズの公式 :

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n \mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A|B_j)}$$

が成り立つことを証明せよ.

9. 事象 A, B に関して, 次の条件が同値であることを示せ;

(i) A と B が独立

(ii) A^{c} と B が独立

(iii) A^{c} と B^{c} が独立

10. 事象 A, B, C が独立であることと, 次の 8 つの等式がすべて成り立つことが同値であることを示せ.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C), \quad \mathrm{P}(A^c\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C),\\
&\mathrm{P}(A\cap B^c\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C), \quad \mathrm{P}(A\cap B\cap C^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^c),\\
&\mathrm{P}(A\cap B^c\cap C^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C^c), \quad \mathrm{P}(A^c\cap B\cap C^c)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^c),\\
&\mathrm{P}(A^c\cap B^c\cap C)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C), \quad \mathrm{P}(A^c\cap B^c\cap C^c)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C^c)
\end{aligned}
$$

11. 確率変数 X の分布関数 $F(x)$ に関して, 以下を示せ;

(a) $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$ $({}^{\forall}a,b\in\mathbb{R}, a<b)$

(b) $x_1<x_2\Rightarrow F(x_1)\leq F(x_2)$

(c) $F(x+0)=F(x)$

(d) $\{x|F(x)-F(x-0)>0\}$ が可算集合

(e) $F(x)-F(x-0)=\mathrm{P}(X=x)$

(f) $F(-\infty)=0$ (ただし, 定理 2.4 を使ってはいけない.)

12. 確率ベクトル (X,Y) の同時分布関数が 任意の x,y に対して $F_{X,Y}(x,y)=f(x)g(y)$ と表されるとき, X,Y は独立であることを証明せよ. ($f(x), g(y)$ は, X,Y の周辺分布関数になるととは限らない. また, 定理 2.7 を使ってはいけない.)

13. (X,Y) を 2 次元連続型確率変数, まはた, 2 次元離散型確率変数とする. (X,Y) の同時確率密度関数が 任意の x,y に対して $f_{X,Y}(x,y)=f(x)g(y)$ と表されるとき, X,Y は独立であることを証明せよ. ($f(x), g(y)$ は, X,Y の周辺確率密度関数になるととは限らない. また, 定理 2.11 を使ってはいけない.)

14. $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ を確率空間とし, $A,B\in\mathcal{B}$ とする. Ω 上の関数 X,Y をそれぞれ

$$
X(\omega)=\begin{cases} a & \omega\in A\\ c & \omega\notin A\end{cases}, \quad Y(\omega)=\begin{cases} b & \omega\in B\\ d & \omega\notin B\end{cases},
$$

と定義するとき, 以下に答えよ. ただし, a,b,c,d は実数値である.

(a) X,Y は $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$ 上の確率変数であることを示せ.

(b)

$$
p_{ab}=\mathrm{P}(A\cap B), \quad p_{ad}=\mathrm{P}(A\cap B^c), \quad p_{cb}=\mathrm{P}(A^c\cap B), \quad p_{cd}=\mathrm{P}(A^c\cap B^c)
$$

とするとき, X,Y が独立であることの必要十分条件は

$$
p_{ab}p_{cd}-p_{ad}p_{cb}=0
$$

であることを示せ.

15. (X, Y) を 2 次元連続型確率変数, または, 2 次元離散型確率変数で, X, Y は独立であるとする. $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$ が存在するとき, $\mathrm{E}(XY)$ も存在し, $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ が成り立つことを証明せよ. (定理 3.5 を使ってはいけない.)

16. X, Y が独立で, $\mathrm{E}(X^2), \mathrm{E}(Y^2)$ が存在するとする. このとき $\mathrm{Var}(X+Y)$ も存在し, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ が成り立つことを証明せよ. (定理 3.9 を使ってはいけない.)

17. 以下の分布に関して, 確率密度関数を調べ, 確率密度関数の性質を満たすことを示し, それぞれの平均と分散を求めよ.

(a) 2 項分布

(b) 3 項分布

(c) 超幾何分布

(d) 負の二項分布

(e) 正規分布

(f) 指数分布

(g) ガンマ分布

18. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とし, 連続関数とする. このとき, 以下の変形を施した確率変数 Y の分布関数を F を用いて表せ;

(a) $Y = aX + b$ (ただし, a, b は定数, $a \neq 0$)

(b) $Y = aX^2 + b$ (ただし, a, b は定数, $a \neq 0$)

(c) $Y = e^X$

19. X が正規分布または指数分布に従うとき, 問題 **18** の (a), (b) において $a = 1$, $b = 0$ とした変換を行った場合の分布関数と確率密度関数を求めよ.

20. 問題 **17** のそれぞれの分布に従う確率変数に対して, 問題 **18** の変換を行った場合の分布関数を求めよ.

21. X, Y は独立に, 標準正規分布に従う確率変数であるとする, このとき以下に答えよ.

(a) $X + Y$ の確率密度関数を計算せよ.

(b) $X = R\cos U,\ Y = R\sin U$ $(R \geq 0,\ 0 \leq U < 2\pi)$ によって, R, U を定義する. R, U それぞれのの周辺確率密度関数を計算せよ.

(c) (b) の R, U は独立であることを確かめよ.