確率・統計 A 演習問題 No.1

1. Ω の部分集合 A, B について, $A \subset B$ は $\forall x \in \Omega (x \in A \Rightarrow x \in B)$ と表わされる. $A = B$ と同値な命題を次の命題および, 論理記号を用いて書け.

$$x \in A \qquad x \in B \qquad \forall x \in \Omega \qquad \exists x \in \Omega \qquad \Rightarrow \qquad \wedge \qquad \vee$$

(すべて使うとは限らない. 括弧やコンマも適宜使ってよい.)

2. Ω の部分集合 A, B, C について以下を証明せよ. ただし, 命題に関するド・モルガンの公式や分配率などの公式は用いてもよい.

(1) (a) $(A^c)^c = A$ (b) $\Omega^c = \emptyset$ (c) $\emptyset^c = \Omega$

(2) (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(3) (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. 集合 A, B に対して, $C = A \cap B, A' = A \cap C^c, B' = B \cap C^c$ とおく. このとき, 以下を計算により示せ. ただし 2 の結果は周知の事実としてよい.
(a) $A \cup B = A' \cup B' \cup C$ (b) $A' \cap B' \cap C = \emptyset$ (c) $A' \cap C = \emptyset$
(d) $A' \cup C = A$ (e) $B' \cap C = \emptyset$ (f) $B' \cup C = B$

4. 有限集合 A の要素数を $\#(A)$ と表す. $A \cap B = \emptyset$ であるとき, $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$ であることを用いて以下を示せ. ただし 3 の結果は周知の事実としてよい.

(1) A, B を有限集合とするとき $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$

(2) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を有限集合とするとき

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \#(A_k) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

ただし, $\displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_k)}$ は $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ を満たす $i_1, \ldots, i_k$ の組みのすべてにわたる和を表わすものとする.

5. 集合族 $\mathbf{A} = \{A_\alpha;\ \alpha \in \Lambda\}$ に対して $x \in \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ は $\exists \alpha \in \Lambda (x \in A_\alpha)$ と同値である.

これに習って, $x \in \displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ と同値な命題を書け.

6. 集合族 $\mathbf{A} = \{A_\alpha;\ \alpha \in \Lambda\}$ に対して以下を証明せよ. ただし, A, A_α $(\alpha \in \Lambda)$ は Ω の部分集合である. また, 命題に関するド・モルガンの公式や分配率などの公式は用いてもよい.

(1) $A \cap \left(\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) = \displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cap A_\alpha)$ (2) $A \cup \left(\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) = \displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cup A_\alpha)$

(3) $A \cap \left(\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) = \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A \cap A_\alpha)$ (4) $A \cup \left(\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) = \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A \cup A_\alpha)$

(5) $\left(\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$ (6) $\left(\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$