確率・統計 A 演習問題 No.10

1. Ω を空でない集合とし, $\mathcal{B} \subset \wp(\Omega)$ とする. $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, B, C, \Omega\}$ は Ω の σ-集合体ではないことを証明せよ. ただし, $\emptyset, A, B, C, \Omega$ は互いに異なる Ω の部分集合である.

2. $\mathcal{B}$ を σ-集合体とする. σ-集合体の定義のみを用いて, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ ならば $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B}$ を示せ.

3. A, B を事象とする. 確率の定義のみを用いて, $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$ を示せ.

4. $A_n, B_n \subset \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で, $A_n \supset A_{n+1}, B_n \subset B_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たすとする. $C_{2m} = A_m, C_{2m-1} = B_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ と定義するとき, $\overline{\lim}_{n\to\infty} C_n = \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} C_n = \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \cap \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}$ であることを示せ.

5. 2 次元ボレル集合体 $\mathbb{B}_2$ は, $\mathbb{R}^2$ の部分集合の属 $J_2 = \{(a, b] \times (c, d];\ a < b, c < d\}$ を含む最小の σ-集合体として定義される. このとき, $[a, b] \times [c, d] \in \mathbb{B}_2$, $(a, b) \times (c, d) \in \mathbb{B}_2$ を示せ.

6. ある学校では, 血液型が A 型, B 型, O 型, AB 型である人数比が丁度 4 : 3 : 2 : 1 である. また, 占いを信じるかどうかのアンケート調査を行ったところ, 血液型別に分類して, 占いを信じる人の割合が

   A 型 : 30%,　B 型 : 50%,　O 型 : 70%,　AB 型 : 10%,

   であった. この学校で無作為に一人選んだ人が占いを信じているとき, 血液型が O 型である確率を求めよ.

7. ある学校では, 12 星座をすべて言える人の割合は 30%, 星占いを信じている人の割合は 40% であった. この学校で無作為に選んだ人が 12 星座をすべて言えるという事象を A, 星占いを信じているという事象を B とするとき, A, B は独立である. このとき, 12 星座をすべて言える人の中で, 星占いを信じている人の割合を求めよ.

8. $a < b < c$ とする. 区間 $(a, b), (a, c)$ を含む, $\mathbb{R}$ の最小の σ-集合体を $\mathcal{B}$ とする. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $Y(x)$ が $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上の確率変数であるならば, Y は離散型であることを示せ. このとき, Y の取り得る値は最大で何個か.

9. X を確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とし, 関数 G を $G(x) = \mathrm{P}(X < x)$ によって定義する. このとき, $G(x - 0) = G(x)$ を証明せよ.

10. X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathbb{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする.

    (1) X, Y が独立であることの定義を書け.

    (2) (1) の定義のみを用いて, X, Y が独立ならば $\mathrm{P}(X \leq a, Y \geq b)\mathrm{P}(X \leq a)\mathrm{P}(Y \geq b)$ であることを証明せよ. (確率や σ-集合体の性質などは証明なしに用いてよい.)

11. 赤玉が 4 個, 白玉が 6 個入っている袋から, 無作為に 3 個玉を取り出すときの赤玉の個数を X とする. また, この袋から無作為に玉を 1 個取り出して色をチェックしたら戻す, という操作を 3 回繰り返した時の赤玉が取り出された回数を Y とする.

    (1) X, Y それぞれの確率関数を求めよ.

    (2) X, Y それぞれの平均を求めよ.

12. 2 次元確率変数 (X, Y) の確率密度関数が $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ と表されるとする. ただし, g は微分可能な非負値連続関数である. $X = R\cos\theta, Y = R\sin\theta$ $(R \geq 0,\ 0 \leq \Theta < 2\pi)$ によって, R, Θ を定義する.

    (1) (R, Θ) の同時確率密度関数 $h(r, \theta)$ を g を用いて表わせ.

    (2) R, Θ の周辺確率密度関数を, それぞれ, g を用いて表わせ.

    (3) R, Θ は独立であることを示せ.

    (注. $(x, y) = (0, 0)$ においてヤコビ行列式が 0 となり, また, $(X, Y) = (0, 0)$ のとき, Θ の値は一意に定まらないが, $\mathrm{P}((X, Y) = (0, 0)) = 0$ なので, 定理 3.3 において, $\mathcal{X}$ は原点を含まないものと考えて良い.)