確率・統計 A 演習問題 No.11

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が確率密度関数になっていることを確かめよ．

(2) X を確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型確率変数とする．このとき, X の平均が存在しないことを示せ．

(注．確率密度関数 $f(x)$ によって定められる連続型分布をコーシー分布と呼ぶ.)

2. $X \sim N(0,1)$ とし, $Y = e^X$ とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) Y の確率密度関数を求め, その確率密度関数を用いて $\mathrm{E}(Y)$ を計算せよ．

(2) 教科書の定理 3.1 を用いて, $\mathrm{E}(Y)$ を計算し, その結果が (1) と一致することを確かめよ．

(注．Y が従う分布のことを平均パラメータ 0, 分散パラメータ 1 の対数正規分布と言い, $LN(0,1)$ と書く)

3. 次の不等式が成り立つことを証明せよ．ただし, X, Y は確率変数とする．

(1) $\{\mathrm{E}(XY)\}^2 \leq \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$．(シュワルツの不等式)

(2) $\sqrt{\mathrm{E}\left((X+Y)^2\right)} \leq \sqrt{\mathrm{E}\left(X^2\right)} + \sqrt{\mathrm{E}\left(Y^2\right)}$．(三角不等式)

4. 次の確率分布の分散を求めよ．

(1) ポアッソン分布 $p(\lambda)$．

(2) 負の 2 項分布 $NB(k,p)$．

(3) 超幾何分布 $HG(N,M,n)$．

(4) 指数分布 $Ex(\lambda)$．

5. 次の確率分布の歪度, 尖度を求めよ．

(1) サイコロを 1 回振ったときの出た目を表す確率変数の分布．

(2) 一様分布 $U(0,1]$．

(3) 指数分布 $Ex(\lambda)$．

6. 離散型確率変数 (X,Y) は次の同時確率関数をもつとする．

$Y \diagdown X$	1	2	3
1	1/12	1/6	1/3
2	1/6	1/12	1/6

例えば, $\mathrm{P}(X=3, Y=1) = 1/3$ ということを意味する．X と Y の相関係数 $\rho(X,Y)$ を計算せよ．答は四捨五入により小数第 2 位まで求めよ．

7. (線形変換に関する相関係数の不変性) 確率変数 X, Y, 定数 a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $ac > 0$ に対して, $U = aX + b$, $V = cY + d$ とおく．このとき, $\rho(U,V) = \rho(X,Y)$ となることを示せ．

8. 確率変数 X, Y, Z は独立で, 平均はすべて μ, 分散はすべて σ^2 であると仮定する．$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を 0 でない定数とし, $U = aX + bY$, $V = cX + dZ$ とおく．

(1) U の平均 $\mathrm{E}(U)$, 分散 $\mathrm{Var}(U)$ を求めよ．

(2) U と V の共分散 $\mathrm{Cov}(U,V)$, 相関係数 $\rho(U,V)$ を求めよ．

9. U は $N(0,1^2)$ に, V は $N(0,2^2)$ に従う確率分布で, 互いに独立であるとする．いま, $X = (U+V)/\sqrt{2}$, $Y = (U-V)/\sqrt{2}$ とおく．

(1) 2 次元確率分布 (X,Y) の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 次元確率分布 (X,Y) の共分散行列を求めよ．