確率・統計 A 演習問題 No.12

1. X を平均をもつ確率変数とする. 関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が凸関数ならば

$$h\left(\mathrm{E}(X)\right) \leq \mathrm{E}\left(h(X)\right) \quad \text{(イェンセンの不等式)}$$

となることを示せ. (ヒント : ${}^\forall x \ h(x) \geq a(x - \mathrm{E}(X)) + h(\mathrm{E}[X])$ を満たす a が存在することを示す.)

2. X は正の整数値をとる離散型確率変数であり, 平均が存在するとする. このとき

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq x)$$

が成り立つことを示せ. (ヒント : $\mathrm{P}(X \geq x) = \sum_{k=x}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)$)

3. $X \sim N(0,1)$ とする. 事象 $B =$“$X \geq 0$” が与えられたときの X の条件付き確率密度関数と, 条件付き平均 $\mathrm{E}(X|B)$ も求めよ.

4. サイコロを 2 回投げる試行において, 1 回の目を X_1, 2 回目の目を X_2 と表す.

   (1) 事象 “$X_1 + X_2 = 7$ が与えられたときの X_1 の条件付き確率関数と, X_1 の条件付き平均を求めよ.

   (2) 事象 “$X_1 + X_2 \leq 7$ が与えられたときの X_1 の条件付き確率関数と, X_1 の条件付き平均を求めよ.

5. X, Y は独立で, それぞれポアッソン分布 $p(\lambda)$ に従う確率変数とする.

   (1) $Z = X + Y$ の確率関数を求めよ.

   (2) n を自然数とする. 事象 “$Z = n$” が与えられたときの X の条件付き分布を求めよ.

6. X を 指数分布 $Ex(\lambda)$ に従う確率変数とする. $a > 0$ とするとき, 事象 “$X \geq a$” が与えられたときの X の条件付き確率密度関数と, 条件付き平均を求めよ.

7. X, Y は独立で, それぞれ指数分布 $Ex(\lambda)$ に従う確率変数とする.

   (1) $W = X + Y,\ Z = \dfrac{X}{X+Y}$ とするとき, W, Z の同時確率密度関数を求めよ.

   (2) $W = w$ が与えられたときの Z の条件付き確率密度関数を求めよ.

   (3) $W = w$ が与えれらたときの X の条件付き確率密度関数と, 条件付き平均を求めよ.

8. X, Y は独立な連続型確率変数で, それぞれの確率密度関数を $f_X(x), f_Y(y)$ とする. $\mathrm{P}(Y > 0) = 1$ と仮定するとき, 以下の問いに答えよ.

   (1) $Z = XY$ とおくとき, (Y, Z) の同時確率密度関数を f_X, f_Y を用いて表わせ.

   (2) $Y = y$ が与えられたときの Z の条件付き確率密度関数を f_X, f_Y を用いて表わせ.

9. (X, Y) の 2 次元連続型確率変数とする. $g(y)$ をボレル可測関数とするとき, 以下の問いに答えよ.

   (1) $\mathrm{E}[\{X - g(Y)\}^2 | Y = y] = \mathrm{E}[\{X - E(X|Y = y)\}^2] + \{\mathrm{E}(X|Y = y) - g(y)\}^2$ が成り立つことを示せ.

   (2) $\mathrm{E}[\{X - g(Y)\}^2]$ は, $g(y) = \mathrm{E}(X|Y = y)$ のとき最小となることを示せ.

10. 2 次元確率変数 (X, Y) は連続型または, 離散型であるとする. X, Y が独立ならば, $\mathrm{E}(X|Y) = \mathrm{E}(X)$ であることを示せ.