確率・統計 A 演習問題 No.13

1. 確率変数 X の特性関数を $\varphi_X(t)$ とするとき, 次が成り立つことを示せ.

   (1) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.　　(2) $\mathrm{E}(|X|) < \infty$ であるとき, $\varphi'_X(0) = i\mathrm{E}(X)$

2. 次の分布の特性関数を求めよ.

   (1) 2 項分布 $B(n,p)$　　(2) ポアソン分布 $p(\lambda)$　　(3) 一様分布 $U(0,1)$

3. 連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(-x) = f(x)$ が成り立つとき, X の特性関数は実数値関数であることを示せ.

4. $C(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx$ とおくとき,

$$\frac{d}{dt}C(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) x e^{-x^2/2} dx = \Big[\sin(tx) e^{-x^2/2}\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} t\cos(tx) e^{-x^2/2} dx$$

   と変形できる. これを利用して $N(0,1)$ の特性関数を求めよ.

5. 特性関数を利用して, 次の分布の平均, 分散, 歪度を求めよ.

   (1) 2 項分布 $B(n,p)$　　(2) ポアソン分布 $p(\lambda)$　　(3) 一様分布 $U(0,1)$　　(4) 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$

   (それぞれ, 3 次モーメントが存在すると仮定し, また, 特性関数の計算は書かなくて良い)

6. 多変量正規分布 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の特性関数は $\varphi_{\boldsymbol{X}}(t) = \exp\{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}\}$ によって与えられる. 2 次モーメントが存在すると仮定して, $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = \sigma_{jk}$ が成り立つことを示せ. ただし, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{jk})_{j,k=1,\ldots,p}$ である.

7. $X_1 + X_2$ の特性関数を求めることにより, 次を示せ.

   (1) $X_1 \sim B(m,p)$, $X_2 \sim B(n,p)$, X_1 と X_2 は互いに独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(m+n, p)$.

   (2) $X_1 \sim p(\lambda_1)$, $X_2 \sim p(\lambda_2)$, X_1 と X_2 は互いに独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   (3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1 と X_2 は互いに独立 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

8. 3 項分布について以下に答えよ.

   (1) $M_3(n,(p,q))$ の特性関数を求めよ.

   (2) $(X,Y) \sim M_3(n,(p,q))$ とする. 特性関数を利用して, $\mathrm{E}(XY)$ を求めよ.

9. 3 項分布について以下に答えよ.

   (1) $(X_1, X_2) \sim M_3(m,(p,q))$, $(Y_1, Y_2) \sim M_3(n,(p,q))$ で, (X_1, X_2) と (Y_1, Y_2) が独立ならば, $(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \sim M_3(m+n,(p,q))$ であることを特性関数を使って示せ.

   (2) $\mathrm{E}(e^{it_1X} e^{it_2Y})$ で, $t_2 = 0$ とすると, X の特性関数が得られることを利用して, $(X,Y) \sim M_3(n,(p,q))$ のとき, $X \sim B(n,p)$ であることを示せ.

10. X_1, X_2 は独立な確率変数で, $X_j \sim Ga(r_j, \lambda)$ $(j = 1,2)$ であるとする. このとき次に答えよ.

    (1) 特性関数を利用して, X_1 の平均と分散を求めよ. ただし, 2 次モーメントが存在すると仮定してよい.

    (2) $X_1 + X_2$ の分布もガンマ分布であることを示せ.

    ただし, ガンマ分布 $Ga(r,\lambda)$ の特性関数と確率密度関数は, それぞれ,

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r e^{-\lambda x} x^{r-1}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

    で与えられる.

11. 2 次元確率変数 (X,Y) の特性関数を $\varphi(t_1, t_2)$ とする. このとき X, Y が独立であるための必要十分条件は,

$$\text{任意の } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ に対して } \varphi(t_1, t_2) = \varphi(t_1, 0)\varphi(0, t_2)$$

    であることを証明せよ.